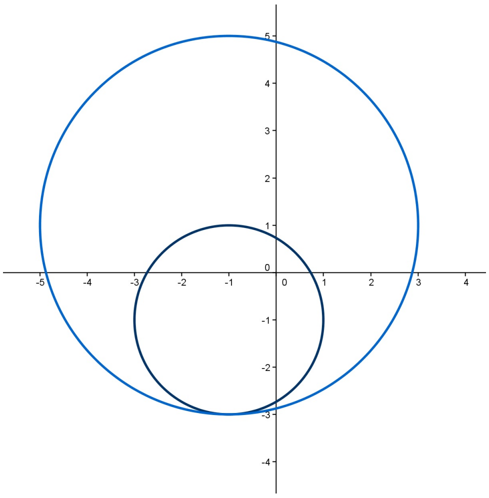
Rješenje 1. zadatka:

a) Radi se o dvije kružnice u kompleksnoj ravnini koje se dodiruju u točki $z = -1 - 3i$.



b) Zapišimo z u trigonometrijskom obliku $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Iz prvog uvjeta $|z| = 1$ slijedi da je $r = 1$. Nadalje,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(z^4) &= 4\operatorname{Re}(z^2)\\
\operatorname{Im}(r^4(\cos(4\varphi) + i\sin(4\varphi))) &= 4\operatorname{Re}(r^2(\cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi)))\\
r^4\sin(4\varphi) &= 4r^2\cos(2\varphi)\\
\sin(4\varphi) &= 4\cos(2\varphi)\\
2\sin(2\varphi)\cos(2\varphi) &= 4\cos(2\varphi)\\
2\cos(2\varphi)\underbrace{(\sin(2\varphi) - 2)}_{\neq 0 \text{ jer je } -1 \leq \sin(2\varphi) \leq 1} &= 0.
\end{aligned}$$

Drugim riječima, $\operatorname{Im}(z^4) = 4\operatorname{Re}(z^2)$ povlači da je $\cos(2\varphi) = 0$, odnosno $2\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$, to jest $\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k = 0, 1, 2, 3$. Odavde dobivamo da je $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

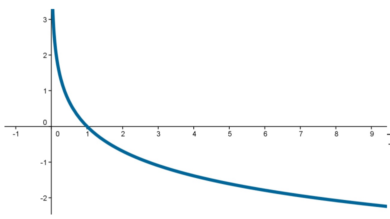
<u>Rješenje 2. zadatka:</u>

a) Neka su S_1, S_2, S_3, S_4 te $f_1 \colon S_1 \to S_2, f_2 \colon S_2 \to S_3, f_3 \colon S_3 \to S_4$ tri padajuće funkcije. Iz definicije monotono padajuće funkcije slijedi da za bilo koji $x_1, x_2 \in S_1$ vrijedi:

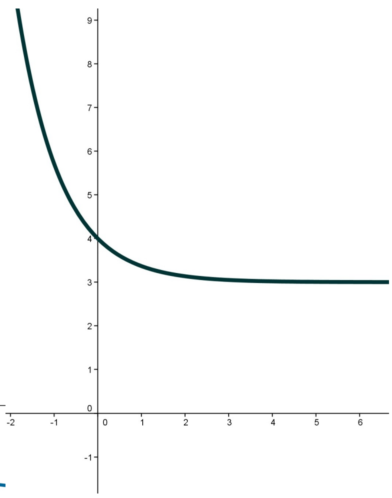
$$\begin{aligned} x_1 \leq x_2 &\Rightarrow f_1(x_1) \geq f_1(x_2) \\ &\Rightarrow f_2(f_1(x_1)) \leq f_2(f_1(x_2)) \\ &\Rightarrow f_3(f_2(f_1(x_1))) \geq f_3(f_2(f_1(x_2))). \end{aligned}$$

Drugim riječima, $f_3 \circ f_2 \circ f_1$ je monotono padajuća funkcija na S_1, a to smo i željeli pokazati.(**<u>Napomena:</u>** Ukoliko student promatra strogo padajuće funkcije, potrebno je priznati rješenje.)

b) Grafovi funkcija $f(x) = -\ln(x)$ i $g(x) = e^{-x} + 3$ dani su na sljedećim slikama.



(a) $f(x) = -\ln(x)$



(b) $g(x) = e^{-x} + 3$

Uočimo da je $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(e^{-x} + 3) = -\ln(e^{-x} + 3)$. Da bi ovaj izraz imao smisla, treba biti $e^{-x} + 3 > 0$, a to je pak zadovoljeno za svaki $x \in \mathbb{R}$ pa je $D(f \circ g) = \mathbb{R}$. S obzirom da su f i g padajuće funkcije, to je $f \circ g$ <u>rastuća</u> kao kompozicija dvaju padajućih funkcija. (**<u>Napomena:</u>** Iz a) dijela zadatka je vidljivo da je kompozicija dvaju padajućih funkcija rastuća funkcija.)

Rješenje 3. zadatka:

a) Korištenjem odgovarajućih računskih operacija nad matricama dobivamo:

$$\begin{aligned} X &= (A + BX^{-1})^{-1} \\ X^{-1} &= A + BX^{-1} \\ X^{-1} - BX^{-1} &= A \\ (I - B)X^{-1} &= A \quad \{A \text{ i } I - B \text{ su regularne}\} \ (\clubsuit) \\ (I - B) &= AX \\ A^{-1}(I - B) &= X. \end{aligned}$$

Izračunajmo inverz matrice A :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Dakle, $A = A^{-1}$. Nadalje,

$$I - B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Množenjem A^{-1} i $I - B$ dobivamo:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

b) Zadana matrica A je regularna pa iz ($\clubsuit$) slijedi da postoji X koji zadovoljava problem ako i samo ako je $I - B$ invertibilna matrica, to jest

$$\det(I - B) = \det \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 - a & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \neq 0,$$

odnosno ako i samo ako je $a \neq 1$. Odavde slijedi da X ne postoji ako i samo ako je $a = 1$.

Rješenje 4. zadatka:

a) Primjenom postupka za računanje svojstvenih vrijednosti dobivamo:

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 1 \\ 0 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & -3 & \lambda+2 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 \\ -3 & \lambda+2 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)((\lambda-2)(\lambda+2)+3) \\
&= (\lambda-1)(\lambda^2-4+3) \\
&= (\lambda-1)(\lambda^2-1) \\
&= (\lambda-1)^2(\lambda+1).
\end{aligned}$$

Dakle, svojstvene vrijednosti matrice A su $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 1$. Izračunajmo svojstveni potprostor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = -1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Odavde slijedi da je $x_1 = \frac{1}{3}x_3,\ x_2 = \frac{1}{3}x_3,\ x_3 = 3\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, to jest

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 3\alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo svojstveni potprostor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2 = 1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Odavde odmah slijedi da je $x_2 = x_3,\ x_1 = \alpha \in \mathbb{R}, x_3 = \beta \in \mathbb{R}$, pri čemu je $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$, to jest

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1.način:

b) Dokažimo ekvivalentnu tvrdnju: matrica A nije regularna ako i samo ako postoji barem jedna svojstvena vrijednost koja je jednaka nuli. Naime, ako matrica A nije regularna, onda je $\det A = 0$ pa je i $\det(A - 0 \cdot I) = 0$, odnosno 0 je svojstvena vrijednost. Obratno, ako je 0 svojstvena vrijednost, onda je $\det(A - 0 \cdot I) = \det(A) = 0$ pa A nije regularna matrica, a to smo i tvrdili.

2.način:

b) Neka je $k(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ karakteristični polinom matrice A. Uočimo da je slobodni član ovog polinoma $k(0) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$. Zapišemo li $k(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n)$, pri čemu su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sve svojstvene vrijednosti od A, vidimo da je slobodni član jednak $\pm \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$. Ukoliko su sve svojstvene vrijednosti različite od nula, onda je i njihov produkt različit od nule, a zbog gornjeg razmatranja slijedi da je i $\det(A) \neq 0$, to jest A je regularna matrica.

Obratno, ako je A regularna matrica, onda je $\det(A) \neq 0$ pa je i slobodni član koji je produkt svih svojstvenih vrijednosti matrice također različit od nula. No, ako je njihov umnožak različit od nula, tada su i sve svojstvene vrijednosti različite od nula, a to smo i željeli pokazati.

Rješenje 5. zadatka:

a) Niz realnih brojeva (a_n) konvergira k realnom broju L ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|a_n - L| < \varepsilon$. Pri tome broj L nazivamo limes niza (a_n) i pišemo $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. (**Ili:** Niz realnih brojeva (a_n) konvergira k realnom broju L ako se izvan svakog okoliša broja L nalazi samo konačno mnogo članova niza (a_n).)

b) Dokažimo matematičkom indukcijom da je niz (a_n) rastući. Primijetimo da je $a_2 = \frac{1}{8}(2 + a_1)^2 = \frac{1}{8}(2 + 0)^2 = \frac{1}{2}$ pa je stoga $a_1 < a_2$. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi da je $a_n < a_{n+1}$. Tvrdimo da je tada i $a_{n+1} < a_{n+2}$. Računamo:

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &> a_n \quad |+2 \\
a_{n+1} + 2 &> a_n + 2 \quad |(\ )^2 \\
(a_{n+1} + 2)^2 &> (a_n + 2)^2 \quad |:8 \\
\frac{1}{8}(a_{n+1} + 2)^2 &> \frac{1}{8}(a_n + 2)^2 \\
a_{n+2} &> a_{n+1}.
\end{aligned}
$$

(**Napomena:** Uočimo da smo u drugom koraku iskoristili činjenicu da je $a_n + 2 > 0$ i $a_{n+1} + 2 > 0$.) Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Dokažimo sada matematičkom indukcijom da je niz (a_n) ograničen odozgo s 2. Baza indukcije je očito zadovoljena jer je $a_1 = 0 < 2$. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi da je $a_n < 2$. Pokažimo da je tada i $a_{n+1} < 2$. Imamo:

$$a_{n+1} = \frac{1}{8}(a_n + 2)^2 < \frac{1}{8}(2 + 2)^2 = 2.$$

Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

c) U b) dijelu zadatka smo pokazali da je niz (a_n) rastući i omeđen odozgo s 2 pa je prema kriteriju konvergencije za monotone nizove on konvergentan, to jest postoji realan broj L takav da je $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. Vrijedi:

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{1}{8}(2+a_n)^2 \quad \Big| \lim_{n\to\infty} \\
L &= \frac{1}{8}(2+L)^2 \\
8L &= 4+4L+l^2 \\
L^2-4L+4 &= 0 \\
(L-2)^2 &= 0.
\end{aligned}
$$

Dakle, $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

Rješenje 6. zadatka:

a) Neka je $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, $a_n \neq 0$ i $P_m(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0$, $b_m \neq 0$. Sada je

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P_n(x)}{p_m(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0}$$
$$= \begin{cases} 0, & n < m \\ \frac{a_n}{b_m}, & n = m \\ +\infty, & n > m \text{ i } \frac{a_n}{b_m} > 0 \\ -\infty, & n > m \text{ i } \frac{a_n}{b_m} < 0 \end{cases}.$$

b) Računamo:

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt[4]{x^2+x+1})x^a = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1-\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x^2+x+1}}x^a$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+1-x^2-x-1}{\underbrace{(\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x^2+x+1})}_{\sim 2\sqrt{x}}\underbrace{(x+1+\sqrt{x^2+x+1})}_{\sim 2x}}x^a$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{a+1}}{4x^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{a-\frac{1}{2}}}{4} = \begin{cases} 0, & a < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}, & a = \frac{1}{2} \\ +\infty, & a > \frac{1}{2} \end{cases}.$$