Dodatni zadatci za vježbu (gradivo 9.knjižice)

1. $f(x) = \sqrt{x}$; $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $f''(x) = \frac{-1}{4\sqrt{x^3}}$; $f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}$.
   $f(25) = 5$; $f'(25) = \frac{1}{10}$; $f''(25) = \frac{-1}{500}$; $f'''(25) = \frac{3}{25000}$.
   (a) $\sqrt{26} \approx 5 + \frac{1}{10}(26 - 25) = 5.1$ (istovjetno smo mogli reći da aproksimiramo pomoću prvog Taylorovog polinoma u razvoju oko točke $x = 25$)
   (b) $\sqrt{26} \approx 5 + \frac{1}{10}(26 - 25) + \frac{-1}{2!\cdot 500}(26 - 25)^2 = 5.099$
   (c) $\sqrt{26} \approx 5+\frac{1}{10}(26-25)+\frac{-1}{2!\cdot 500}(26-25)^2+\frac{3}{3!\cdot 25000}(26-25)^3 = 5.09902$

   Primjedba: Približna vrijednost broja $\sqrt{26}$ uz zaokruživanje na deset decimalnih mjesta iza decimalne točke iznosi 5.0990195136.

2. $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{x^7}{7}\left(\frac{1}{(1+x_1)^7} - \frac{1}{(1-x_1)^7}\right)$ za neki $x_1 \in (0, x)$, ako je $x > 0$, t.j. za neki $x_1 \in (x, 0)$, ako je $x < 0$.
   (Naputak: prije deriviranja funkciju f napisati u obliku
   $\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1 + x) - \ln(1 - x)$).

3. $f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1$; $f'(1) = 18, f''(1) = 34, f'''(1) = 42, f^{(iv)}(1) = 24$, pa imamo
   $x^4+3x^3+2x^2+x+1 = 8+18(x-1)+17(x-1)^2+7(x-1)^3+(x-1)^4.$

U sljedećim zadatcima primijenjujemo L'Hospitalovo pravilo (limesi su oblika $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$):

4. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^n x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{n \ln^{n-1} x}{x} = ... = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{x} = 0.$

5. $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{th} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} = 1$

6. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(tgx)}{\cos(2x)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{tgx}\cdot\frac{1}{cos^2 x}}{-2\sin(2x)} = -1$

7. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{tg} x}{\mathrm{tg}(3x)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{3}{\cos^2(3x)}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}\cdot\frac{\cos^2(3x)}{\cos^2 x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\cos(3x)}{\cos x}\right)^2 =$
   $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-3\sin(3x)}{\sin x}\right)^2 = 3$

8. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\frac{tgx}{x}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{tgx}\cdot\frac{\frac{x}{\cos^2 x}-tgx}{x^2}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{tgx} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x\cos x}{2x^3\cdot\cos^2 x} =$

$= 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x-\frac{1}{2}\sin(2x)}{2x^3\cdot\cos^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x-\frac{1}{2}\sin(2x)}{2x^3} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos^2 x} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x-\frac{1}{2}\sin(2x)}{2x^3} \cdot 1 = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{6x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x}{6x^2} = \frac{1}{3}$

9. $\lim_{x\to 1} \frac{x^x-x}{1-x+\ln x} = ... = -2$

10. $L = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cdot\cos x - a\cdot \mathrm{sh}x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot\cos x - 2x\sin x - a\cdot\mathrm{ch}x}{3x^2}$

Sada zaključujemo da, za $a < 2$ je $L = +\infty$, a za $a > 2$ je $L = -\infty$.

Za $a = 2$ limes je oblika $\frac{0}{0}$, pa ponovo primijenjujemo L'Hospitalovo pravilo i dobivamo $L = -\frac{4}{3}$.

11. Možemo li primijeniti L'Hospitalovo pravilo na računanje limesa $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x+\cos x}$?

Ne, jer $\lim_{x\to\infty} \frac{1+\cos x}{1-\sin x}$ ne postoji.

Inače je $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x+\cos x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}} = 1.$

U sljedećim zadatcima primijenjujemo limesi su oblika $0\cdot\infty$. Zapisujući $f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ ili $f(x)\cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$, oblik $0\cdot\infty$ prevodimo u $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$.

12. $\lim_{x\to 0+} x\cdot\ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+}(-x) = 0$

13. $\lim_{x\to 1+} \ln x \cdot \ln(x-1) = ... = 0$

14. $\lim_{x\to\infty} x\cdot \mathrm{arcctg}x = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{arcctg}x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-1}{x^2+1}}{-\frac{1}{x^2}}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$

U sljedećim zadatcima koristimo $f(x)^g(x) = \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$ i neprekinutost eksponencijalne funkcije (oblici 1^∞, 0^0 i ∞^0 su neodredjeni).

15. $\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} \mathrm{e}^{x\ln x} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to 0+} x\ln x} = ... = \mathrm{e}^0 = 1$

(vidi zad. 12.)

16. $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = ... = 1$

17. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = ... = 1$

18. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{tgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = ... = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$ (vidi zad. 8)

    U sljedećim zadatcima traži se kosa asimptota (kose asimptote) krivulje (prilikom računanja odsječka l kose asimptote, javlja se neodredjeni oblik $\infty - \infty$)

19. $k = 1;\ l = \lim_{x\to\infty}(x \cdot 2^{\frac{1}{x}} - x) = (\infty - \infty) = \lim_{x\to\infty} x \cdot (2^{\frac{1}{x}} - 1) =$

    $= (\infty \cdot 0) = ... = \ln 2$; pravac $y = x + \ln 2$ kosa asimptota

20. $k = \mathrm{e};\ l = \lim_{x\to\infty}(x \cdot \mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}} - \mathrm{e} \cdot x) = \lim_{x\to\infty} x \cdot (\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}} - \mathrm{e}) = (\infty \cdot 0) = ...$

    $= -\mathrm{e}$; pravac $y = \mathrm{e}x - \mathrm{e}$ kosa asimptota

    U sljedećim zadatcima neodredjeni oblik $\infty - \infty$ eliminiramo racionalizacijom

21. pravac $y = \frac{\pi}{2}x - \frac{1}{2}$ je desna, a pravac $y = -\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{2}$ lijeva kosa asimptota.

22. pravac $y = x + 1$ je desna, a pravac $y = -x - 1$ lijeva kosa asimptota.

23. pravac $y = x + \frac{1}{3}$ je kosa asimptota.

24. $k = \frac{1}{2};\ l = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x+\sqrt{x^2+5x+10}} - \frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+4x-x^2-x\cdot\sqrt{x^2+5x+10}}{2x+2\sqrt{x^2+5x+10}} =$

    $= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x\cdot\sqrt{x^2+5x+10}}{2x+2\sqrt{x^2+5x+10}} + \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{2x+2\sqrt{x^2+5x+10}} =$

    $= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-(x^4+5x^3+10x^2)}{(2x+2\sqrt{x^2+5x+10})(x^2+x\cdot\sqrt{x^2+5x+10})} + 1 =$

    $= \lim_{x\to+\infty} \frac{-5x^3-10x^2}{4x\cdot 2x^2} + 1 = \frac{-5}{8} + 1 = \frac{3}{8}$

    Pravac $y = \frac{x}{2} + \frac{3}{8}$ je desna kosa asimptota zadane krivulje.

    Lagano je zaključiti da zadana krivulja nema lijevu kosu (niti horizontalnu) asimptotu.

    U sljedećem zadatku rješenje ovisi o parametru, ali je sam zadatak tehnički prilično jednostavan.

25. $k = 1$; $l = \lim_{x\to+\infty}(\frac{(\sqrt{x}+a)^3}{\sqrt{x}+2} - x) = \lim_{x\to+\infty}(\frac{(3a-2)x+3a^2\sqrt{x}+a^3}{\sqrt{x}+2})$

Odavde lako zaključujemo da je gornji limes konačan samo za $a = \frac{2}{3}$ i da tada iznosi $\frac{4}{3}$.

Dakle, krivulja ima desnu kosu asimptotu za $a = \frac{2}{3}$ i to je pravac $y = x + \frac{4}{3}$.

U sljedećim zadatcima treba naći sve asimptote.

26. $x = 0, x = \frac{1}{2}$ vertikalne asimptote, $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$ kosa asimptota.

27. $x = 2$ vertikalna asimptota, $y = \frac{\pi}{2}$ horizontalna asimptota.