

### Dodatni zadatci za vježbu - 6. knjižica

1. Za svaki od sljedećih nizova nađite sva gomilišta (gomilište može biti  $i \infty$  ili  $-\infty$ ) i limes, ako postoji:

$$a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{3n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n + 3},$$

$$b_n = (-1)^n \cdot \frac{2n + 3}{n^2 + 1},$$

$$c_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n^2 + 1}{2n + 3},$$

$$d_n = n(1 - (-1)^n).$$

Izračunajte

2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin n}{n^k + 1},$$

u ovisnosti o prirodnom broju  $k$ .

3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n - \frac{n^2 + 1}{n + 2} \right),$$

4.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n^2 - \frac{(n + 1)^6}{n^4 + 6n^3} \right),$$

5.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n^2 - \frac{(n + a)^3}{n + 1} \right),$$

u ovisnosti o realnom broju  $a$ .

6.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n} + 1}{\sqrt{n} + 1},$$

7.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+3} - 1}{2^{n-3} + 1},$$

8.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 1}{3^n + 2^n + 1},$$

9.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 2^n}{4^n + 1},$$

10.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n^k + \sqrt{n^4 + 1}},$$

u ovisnosti o prirodnom broju  $k$ .

11.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{\sqrt{n^4 + n^3 + n^2} - n^2},$$

12.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{(n - \sqrt{n^2 + 3n})(n + 2)},$$

13.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n + 1} + \sqrt{2n - 1}}{\sqrt{3n + 2} + \sqrt{3n - 1}},$$

14.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n + 1} - \sqrt{2n - 1}}{\sqrt{3n + 2} - \sqrt{3n - 1}},$$

15.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + 2n + 1} - n),$$

16.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[4]{n^4 + 4n^3 + 4n^2 + 4n + 1} - n),$$

17.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt[3]{n^3 + n^2}),$$

18.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^n (3i + 1)}{n^2 + 1},$$

19.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^n 3^i}{3^n + 1},$$

20.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n 2^{-i},$$

21.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 2^n}{3n^2 + 3^n},$$

22.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot 2^n}{n!},$$

23. Koristeći  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = e$ , izvedite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1},$$

Izračunajte

24.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n.$$

25.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^n.$$

26. Neka je  $a_n = \underbrace{\sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \dots + \sqrt{20}}}}}_{n \text{ korijena}}$ .

a) Dokažite da je niz  $(a_n)$  monoton.

b) Dokažite da je niz  $(a_n)$  omeđen.

c) Izračunajte limes niza  $(a_n)$  i objasnite u kojem koraku koristite tvrdnje dokazane pod a) i b).

27. Zadan je realni broj  $x$ . Neka je  $a_1 = x$ ,  $a_{n+1} = \frac{a_n+2}{5}$ . Dokažite da je niz  $(a_n)$  konvergentan i da ima isti limes (izračunajte ga!), neovisno o broju  $x$ .