

### Dodatni zadatci za vježbu - 3.knjižica

1. (definirani su svi umnošci osim  $\mathbf{AB}$  u b) zadatku)

2. (a)

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} a & 3(d-a) \\ 0 & d \end{bmatrix}, \quad a, d \in \mathbf{R}.$$

(b)

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbf{R}.$$

(c)

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbf{R}.$$

3. (a)

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}.$$

(b)

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 1 & n & \binom{n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Pretpostavimo da, za neki  $n \in \mathbf{N}$ , vrijedi  $(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_n)^T = \mathbf{A}_n^T \mathbf{A}_{n-1}^T \dots \mathbf{A}_1^T$ .

Tada je  $(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_n \mathbf{A}_{n+1})^T = \mathbf{A}_{n+1}^T (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_n)^T = \mathbf{A}_{n+1}^T \mathbf{A}_n^T \mathbf{A}_{n-1}^T \dots \mathbf{A}_1^T$ ,  
čime smo proveli korak indukcije i dokazali tvrdnju.

5.  $(\mathbf{A}^T \mathbf{S} \mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T \mathbf{S}^T \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \mathbf{S} \mathbf{A}$ ; tj.  $\mathbf{A}^T \mathbf{S} \mathbf{A}$  je simetrična matrica.

(u prvom koraku smo koristili tvrdnju iz zadatka 4., a u drugom činjenicu da je  $\mathbf{S}$  simetrična.)

6. Po pretpostavci je  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$  i  $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T$ .

Dokažimo najprije implikaciju:

Ako  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$  komutiraju, onda je  $\mathbf{AB}$  simetrična.

Dakle, neka vrijedi  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ .

Tada je  $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T = \mathbf{BA} = \mathbf{AB}$ ; dakle,  $\mathbf{AB}$  je simetrična.

Zatim dokažimo implikaciju:

Ako je  $\mathbf{AB}$  simetrična, onda  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$  komutiraju.

Dakle, neka vrijedi  $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{AB}$ .

Tada je  $\mathbf{AB} = (\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T = \mathbf{BA}$ ; dakle,  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$  komutiraju.

7. (a) 4

(b)  $-10$

8.  $-4$  (svođenje na trokutasti oblik)

9. 16

(svakom retku, osim prvog, dodati prvi; dobivamo determinantu trokutaste matrice.)

10. 120

(na početku se izluči 5; a onda se “čisti” stupac po stupac.)

11. 1

(od svakog retka, osim prvog, oduzmemo prethodni.)

12.  $-6$

(od svakog retka, osim zadnjeg, oduzmemo sljedeći.) Izračunaj determinantu

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

13.  $\det A = 11$ ,  $\det A^3 = 11^3$ .

(Prvi dio zadatka: Pribrojimo prvom retku ostale. Izlučimo 11 iz prvog retka, a onda, “pomoću prvog retka”, svodimo na trokutasti oblik.

Drugi dio zadatka: koristimo Binet-Cauchyjeve teorem. Vrijedi  $\det A^3 = \det A \cdot \det A \cdot \det A = \det A^3 = 11^3$ .)

14.  $-2304$

(zadatak je malo zahtjevniji od ostalih, ali razmislite još malo, ako ga niste uspjeli riješiti.)