

Rješenja dodatnih zadataka za vježbu - 1. knjižica

1. Obje formule su tautologije.
2. $\neg(\neg A \wedge (B \vee \neg C)) \equiv A \vee \neg(B \vee \neg C) \equiv A \vee (\neg B \wedge C)$.
3. Sud b).
4. $\neg A \equiv (\exists x \in \mathbf{R}^+)(\forall y \in \mathbf{R}^+)(y < x^2 \vee y > x^3)$
 $\neg B \equiv (\exists x \in \mathbf{R})(\exists y \in \mathbf{R})(x^2 = 2xy \wedge x \neq 2y)$
 $\neg C \equiv (\exists x \in \mathbf{R})(\exists y \in \mathbf{R})(x < y \wedge x^2 \geq y^2)$
 $\neg D \equiv (\exists x \in \mathbf{R})(\exists y \in \mathbf{R})(x^2 = y^2 \wedge x \neq y)$.

Istiniti su sudovi $\neg A$, $\neg B$, $\neg C$ i $\neg D$.

5. (a) Ne.
(b) Da.
(c) Da.
(d) Ne.

6. (a) Da.
(b) Ne.

7. (a) Tvrdnja vrijedi za $n = 1$.

Pretpostavimo sada da je $\sum_{i=1}^n i \cdot i! = (n+1)! - 1$ za neki $n \in \mathbf{N}$. Tada je, po toj pretpostavci, $\sum_{i=1}^{n+1} i \cdot i! = \sum_{i=1}^n i \cdot i! + (n+1) \cdot (n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! = (n+1)!(1+n+1) - 1 = (n+2)! - 1$.

(b)

- (c) Za $n = 1$ je $5 + 1 = 6 = 2 \cdot 3$.

Pretpostavimo sada da je $5^n + 2^{n-1}$ djeljivo s 3 za neki $n \in \mathbf{N}$. Tada je $5^{n+1} + 2^n = 5 \cdot 5^n + 2 \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 5^n + 2 \cdot (5^n + 2^{n-1})$, što je, po pretpostavci djeljivo s 3.

- (d) Tvrdnja vrijedi za $n = 5$.

Pretpostavimo sada da je $3^n \cdot (n!)^2 < (2n)!$ za neki $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 5$. Tada je, po toj pretpostavci, $3^{n+1} \cdot ((n+1)!)^2 = 3 \cdot 3^n \cdot (n+1)^2 \cdot (n!)^2 < 3(n+1)^2 \cdot (2n)!$.

Pokažemo li da je $3(n+1)^2 \cdot (2n)! \leq (2n+2)!$, tvrdnja će biti dokazana. Ta je nejednakost ekvivalentna s $3(n+1)^2 \leq (2n+2)(2n+1)$, odnosno s $3n^2 + 6n + 3 \leq 4n^2 + 6n + 2$, tj. s $n^2 \geq 1$, što je ispunjeno za svaki $n \in \mathbf{N}$.

8. (a) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$; to je kružnica sa središtem u točki $(1, -1)$ i polumjerom 2.

(b) Stavimo li $z = x + yi$, dobivamo jednadžbu

$$\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} + \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = 3$$

koja, nakon sređivanja, prelazi u $\frac{4x^2}{9} + \frac{4y^2}{5} = 1$; radi se o elipsi.

Primjedba: Prisjetite se definicije elipse i zadatak ćete riješiti brže.

(c) $\arg z = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$; radi se o šest polupravaca (koji, u ovom slučaju, tvore tri pravca); oprez - $\arg z = \phi$, za dani ϕ jest polupravac, a ne pravac.

9. Iz sustava jednadžbi $x^2 + y^2 = 1$ i $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, lagano dobivamo $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $y = \frac{1}{2}$, pa su rješenja $z_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$,

Savjet: Geometrijski interpretirajte uvjete zadatka.

10. (a) $z_{1,2,3,4} = 4\text{cis}(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2})$, $k = 0, 1, 2, 3$.

Napomena: $\text{cis}\phi$ označava $\cos\phi + i\sin\phi$.

Opres: Pogrešno bi bilo kratiti potencije; kompleksni korijen je višeznačan; jednadžba $z^n = w$, gdje je w zadani kompleksan broj ima n rješenja.

Savjet: Skicirajte rješenja u Gaussovoj ravnini i geometrijski ih interpretirajte.

(b) $z_{1,2,3,4,5,6} = 8\text{cis}(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3})$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Savjet: Skicirajte rješenja u Gaussovoj ravnini i geometrijski ih interpretirajte.

(c) Zadatak je sličan prethodnima.

(d) Vrijedi $\arg(z^5) = \arg(\bar{z}) + 2k\pi$ i $|z^5| = |\bar{z}|$.

Tako imamo $5\arg z = -\arg z + 2k\pi$, tj. $6\arg z = 2k\pi$, odakle imamo

$$\arg z = \frac{k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Iz drugog uvjeta slijedi $|z| = 1$ ili $|z| = 0$.

Tako ukupno imamo sedam rješenja:

$$z_{1,2,3,4,5,6} = \text{cis}(\frac{k\pi}{3}), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$z_7 = 0.$$

Savjet: Napišite prvih šest rješenja bez korištenja funkcija sinus i kosinus.

Primjedba: Zadatak se može riješiti i na drugi način, tako da se polazna jednadžba najprije pomnoži sa z , čime se dobiva $z^6 = |z|^2$. Odatle odmah slijedi $|z| = 0$ ili $|z| = 1$. Prvi slučaj vodi na rješenje $z = 0$, a drugi na $z^6 = 1$, što daje preostalih šest rješenja.

(e) Zadatak je sličan prethodnome. Na početku imamo $\arg(z^5(1+i)) = \arg(\bar{z}) + 2k\pi$ i $|z^5 \cdot (1+i)| = |\bar{z}|$.

Tada je $5\arg z + \arg(1+i) = -\arg z + 2k\pi$ i $|z|^5 \cdot |1+i| = |z|$, itd.

(f) $z^8 + 3z^4 + 2 = (z^4 + 1)(z^4 + 2) = 0$. Rješenja su četvrti korijeni iz -1 i četvrti korijeni iz -2 .

Primjedba: Kako se radi o algebarskoj jednadžbi osmog stupnja, odmah znamo da ona ima osam kompleksnih rješenja brojeći njihovu kratnost (u ovom slučaju, sva su rješenja kratnosti 1).

(g) Zadatak je sličan prethodnome. Iz $z^3 + z^{-3} = i$ dobivamo $z^6 - iz^3 + 1 = 0$; rješavamo najprije kvadratnu jednadžbu u varijabli z^3 , a potom vadimo treće korijene $z_{1,2,3} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$ i $z_{4,5,6} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$.

Dovršite sami.

(h) $z^8 + z^6 + 2z^4 + z^2 + 1 = z^8 + z^6 + z^4 + z^4 + z^2 + 1 = z^4(z^4 + z^2 + 1) + z^4 + z^2 + 1 = (z^4 + 1)(z^4 + z^2 + 1) = 0$, itd.

11. $z + \frac{3}{4}i = \sqrt[3]{i}$, itd.

12. $\arg z = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$. Interpretirajte li geometrijski ovaj uvjet (z leži na nekom od tri polupravca, te interpretirate li geometrijski drugi uvjet $|z - 2| = 1$ (z leži na kružnici sa središtem u točki $(2, 0)$ i polumjerom 1), odmah se vidi da se rješenje može dobiti jedino eventualno za slučaj $\arg z = \frac{11\pi}{6}$. Uvrstavanjem u drugi uvjet lako se dobije rješenje $z = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.