

## Dodatni zadatci za vježbu - 1. knjižica

1. Napišite tablicu istinitosti za sljedeće formule algebre sudova:

(a)  $(x \Rightarrow y) \vee \neg y$

(b)  $(x \wedge (x \Rightarrow y)) \Rightarrow y$

2. Maksimalno pojednostavnite formulu algebre sudova  $\neg(\neg A \wedge (B \vee \neg C))$ .

3. Zadan je sud "Postoji naseljeni otok u državi Liliput čiji svi stanovnici govore engleski i francuski". Koji je od sljedećih sudova negacija zadanog suda:

(a) Na svakom naseljenom otoku države Liliput svaki stanovnik ne govori engleski ili ne govori francuski (ili oboje).

(b) Na svakom naseljenom otoku države Liliput postoji stanovnik koji ne govori engleski ili ne govori francuski (ili oboje).

(c) Postoji naseljeni otok države Liliput na kojem postoji stanovnik koji ne govori engleski ili ne govori francuski (ili oboje).

(d) Na svakom naseljenom otoku države Liliput postoji stanovnik koji ne govori ni engleski ni francuski.

(e) Postoji naseljeni otok države Liliput na kojem postoji stanovnik koji ne govori ni engleski ni govori francuski.

4. Zadani su sljedeći sudovi

$$A \equiv (\forall x \in \mathbf{R}^+)(\exists y \in \mathbf{R}^+)(y \geq x^2 \wedge y \leq x^3)$$

$$B \equiv (\forall x \in \mathbf{R})(\forall y \in \mathbf{R})(x^2 = 2xy \Rightarrow x = 2y)$$

$$C \equiv (\forall x \in \mathbf{R})(\forall y \in \mathbf{R})(x < y \Rightarrow x^2 < y^2)$$

$$D \equiv (\forall x \in \mathbf{R})(\forall y \in \mathbf{R})(x^2 = y^2 \Rightarrow x = y).$$

Negirajte svaki od danih sudova i zapišite ga ne koristeći znak negacije. Koji je od sudova istinit:  $A$  ili  $\neg A$ ,  $B$  ili  $\neg B$ ,  $C$  ili  $\neg C$ ,  $D$  ili  $\neg D$  ?

5. Neka je  $A$  skup od  $m$  elemenata, a  $B$  skup od  $n$  elemenata,  $m, n \in \mathbf{N}$ ,  $m > n$ .

(a) Postoji li injekcija iz  $A$  u  $B$  ?

(b) Postoji li injekcija iz  $B$  u  $A$  ?

(c) Postoji li surjekcija iz  $A$  u  $B$  ?

(d) Postoji li surjekcija iz  $B$  u  $A$  ?

Obrazložite odgovore !

6. Zadana je funkcija  $f : \mathbf{R} \rightarrow (-\infty, 2010]$ ,  $f(x) = 2010 - |x|$ .

- (a) Je li to surjekcija ?
- (b) Je li to injekcija ?

7. Matematičkom indukcijom dokažite da je

- (a)  $\sum_{i=1}^n i \cdot i! = (n+1)! - 1, \forall n \in \mathbf{N}$ .
- (b)  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbf{N}$ .
- (c)  $5^n + 2^{n-1}$  djeljivo s 3,  $\forall n \in \mathbf{N}$ .
- (d)  $3^n \cdot (n!)^2 < (2n)!, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq 5$ .

8. Skicirajte u Gaussovoj ravnini krivulje zadane uvjetom:

- (a)  $|z - 1 + i| = 2$
- (b)  $|z + 1| + |z - 1| = 3$
- (c)  $\arg(z^6) = \frac{3\pi}{2}$

9. Nađite sve kompleksne brojeve  $z$  koji zadovoljavaju oba sljedeća uvjeta:

$$\begin{aligned} |z| &= 1 \\ |z - i| &= 1 \end{aligned}$$

10. Riješite jednadžbu u skupu  $\mathbf{C}$ :

- (a)  $z^4 = (1 - \sqrt{3}i)^8$
- (b)  $z^6 = (1 - \sqrt{3}i)^5 \cdot (\sqrt{3} + i)^{13}$
- (c)  $z^3 = \frac{(1-i)^9}{(-\sqrt{3}+i)^6}$
- (d)  $z^5 = \bar{z}$
- (e)  $z^5 \cdot (1 + i) = \bar{z}$
- (f)  $z^8 + 3z^4 + 2 = 0$
- (g)  $z^3 + z^{-3} = i$
- (h)  $z^8 + z^6 + 2z^4 + z^2 + 1 = 0$

11. Nađite sve  $z \in \mathbf{C}$  koji zadovoljavaju jednadžbu

$$\left(z + \frac{3}{4}i\right)^3 = i$$

i ispitaj je li za neko od tih rješenja  $z$  vrijedi  $\operatorname{Im} z > 0$ .

12. Nađi sve  $z \in \mathbf{C}$  za koje vrijedi  $\arg(z^3) = \frac{3\pi}{2}$  i  $|z - 2| = 1$ .