Rješenja 1. školske zadaće za grupe 1 i 5
29.9.2008.

Podgrupa A

1.

$$z^6 + 4z^4 + z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (z^4+1)(z^2+4) = 0 \Leftrightarrow z^4 + 1 = 0 \text{ ili } z^2 + 4 = 0$$

Jednadžba ima 6 rješenja u skupu kompleksnih brojeva: ako je $z^4 + 1 = 0$ rješenja su $z_{1,2,3,4} = \sqrt[4]{-1} = \cos(\frac{\pi+2k\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi+2k\pi}{4}),\ k = 0,1,2,3$ (zbog $-1 = \cos\pi$). Tako imamo $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$. Ako je $z^2 + 4 = 0$, rješenja su $z_{5,6} = \sqrt{-4}$, odnosno $z_5 = 2i$, $z_6 = -2i$.

2. a) Uvjet je $\frac{1+x^3}{1-x^3} > 0$. Prva mogućnost je $1 + x^3 > 0$ i $1 - x^3 > 0$, što daje $x^3 > -1$ i $x^3 < 1$, odnosno $-1 < x < 1$. Druga mogućnost je $1 + x^3 < 0$ i $1 - x^3 < 0$, što daje $x^3 < -1$ i $x^3 > 1$, što je nemoguće. Zato je $\mathcal{D}(f) = \langle -1, 1\rangle$.

b) $f(-x) = \ln(\frac{1+(-x)^3}{1-(-x)^3}) = \ln(\frac{1-x^3}{1+x^3}) = \ln((\frac{1+x^3}{1-x^3})^{-1}) = -\ln(\frac{1+x^3}{1-x^3}) = -f(x)$ pa je f neparna.

c) $y = f(x) = \ln(\frac{1+x^3}{1-x^3}) \Rightarrow e^y = \frac{1+x^3}{1-x^3} \Rightarrow x^3 = \frac{e^y-1}{e^y+1} \Rightarrow x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{\frac{e^y-1}{e^y+1}}$.

3. a) Ako je neka tvrdnja koja ovisi o prirodnom broju n istinita za neki prirodni broj n_0, i ako iz istinitosti te tvrdnje za $n \geq n_0,\ n \in \mathbb{N}$, slijedi da je istinita i za $n+1$, onda je ona istinita i za sve $n \in \mathbb{N}$ koji su veći ili jednaki n_0.

b) Izračunavši $A^2,\ A^3, \ldots$ naslutimo $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$. Baza: za $n = 1$ tvrdnja vrijedi. Pretpostavka: neka je $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Tada je $A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 + 2^{n+1} - 2 \\ 0 & 2^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2^{n+1} - 1 \\ 0 & 2^{n+1} \end{bmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ = (prvi redak množimo s -3 i dodajemo ostalim recima)

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \text{(determinanta trokutaste matrice)} = 16.$$

Podgrupa B

1.

$$z^6 + z^4 + 16z^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow (z^4+16)(z^2+1) = 0 \Leftrightarrow z^4 + 16 = 0 \text{ ili } z^2 + 1 = 0$$

Jednadžba ima 6 rješenja u skupu kompleksnih brojeva: ako je $z^4+16=0$ rješenja su $z_{1,2,3,4} = \sqrt[4]{-16} = 2(\cos(\frac{\pi+2k\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi+2k\pi}{4}))$, $k = 0,1,2,3$ (zbog $-16 = 16\cos\pi$). Tako imamo $z_1 = \sqrt{2}+\sqrt{2}i$, $z_2 = \sqrt{2}-\sqrt{2}i$, $z_3 = -\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, $z_4 = -\sqrt{2}-\sqrt{2}i$. Ako je $z^2+1=0$, rješenja su $z_{5,6} = \sqrt{-1}$, odnosno $z_5 = i$, $z_6 = -i$.

2. a) Uvjet je $\frac{2-3x}{2+3x} > 0$. Prva mogućnost je $2-3x > 0$ i $2+3x > 0$, što daje $-\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$. Druga mogućnost je $2-3x < 0$ i $2+3x < 0$, što daje $x > \frac{2}{3}$ i $x < -\frac{2}{3}$, što je nemoguće. Zato je $\mathcal{D}(f) = \langle -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\rangle$.

b) $f(-x) = \log(\frac{2-3(-x)}{2+3(-x)}) = \log(\frac{2+3x}{2-3x}) = \log((\frac{2-3x}{2+3x})^{-1}) = -\log(\frac{2-3x}{2+3x}) = -f(x)$ pa je f neparna.

c) $y = f(x) = \log(\frac{2-3x}{2+3x}) \Rightarrow 10^y = \frac{2-3x}{2+3x} \Rightarrow x = f^{-1}(y) = \frac{2-2\cdot 10^y}{3+3\cdot 10^y}$.

3. a) Kao u podgrupi A.

b) Izračunavši A^2, $A^3, \ldots$ naslutimo $A^n = \begin{bmatrix} 2^n & n\cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$. Baza: za $n=1$ tvrdnja vrijedi. Pretpostavka: neka je $A^n = \begin{bmatrix} 2^n & n\cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Tada je $A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{bmatrix} 2^n & n\cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{n+1} & 2^n + n\cdot 2^n \\ 0 & 2^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{n+1} & (n+1)\cdot 2^n \\ 0 & 2^{n+1} \end{bmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$ (1. red množimo s -2 i dodajemo ostalim recima).