

Završni ispit iz Matematike 1

21. siječnja 2008.

Pitanja iz 3. ciklusa

1. (2 boda) Nađite pravokutnik maksimalne ploštine čija jedna stranica leži na osi Ox , a preostala dva vrha se nalaze na krivulji $y = \sqrt{4 - x^2}$. Izračunajte ploštinu tog pravokutnika.
2. (3 boda) Nađite područje definicije, lokalne ekstreme, asimptote i ponašanje na rubovima domene, te skicirajte kvalitativni graf funkcije

$$f(x) = e^{\frac{x^2}{1-x}}.$$

3. (2 boda) Izračunajte integral

$$\int \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}} dx.$$

4. (2 boda) Izračunajte integral

$$\int e^{-x} \sin x dx.$$

5. (2 boda) Izračunajte integral

$$\int \frac{dx}{x^3 + x^2}.$$

6. (4 boda)
 - a) Iskažite teorem (stavak) srednje vrijednosti integralnog računa i geometrijski interpretirajte taj teorem.
 - b) Služeći se definicijom derivacije i teoremom srednje vrijednosti integralnog računa dokažite da za funkciju g , neprekinutu na $[a, b]$, za svaki $x \in \langle a, b \rangle$, vrijedi

$$\frac{d}{dx} \int_a^x g(t) dt = g(x).$$

- c) Služeći se izvedenim pod b), dokažite Newton-Leibnizovu formulu.

7. (2 boda) Izračunajte integral

$$\int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{9 - x^2} dx.$$

8. (3 boda) Zadan je lik P omeđen krivuljama $y = e^x$, $y = e^{-x} + 2$ i osi Oy . Skicirajte lik P i izračunajte njegovu ploštinu.

Vrijeme pisanja je **2h 30min**. Nije dozvoljena uporaba računala niti priručnika.
Pitanja iz cijelog gradiva nalaze se na drugoj strani.

Pitanja iz cijelog gradiva

9. (2 boda) Skicirajte u kompleksnoj ravnini skupove:

- a) $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z + i| \leq 4\}$.
- b) $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3}\}$.

10. (3 boda) Postoje li inverzi sljedećih matrica:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ?$$

Ako da, izračunajte ih.

11. (4 boda) Izračunajte limese:

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin(x)}{x - \sin(2x)}$
- b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}(x)}{\operatorname{tg}(5x)}$

12. (2 boda) Odredite Taylorov polinom $T_6(x)$ za funkciju

$$f(x) = \operatorname{ch}(3x)$$

u točki $c = 0$.

13. (4 boda) Zadana je funkcija

$$y(x) = x\sqrt{1-x^2}, \quad x > 0.$$

Nađite njene ekstreme, skicirajte njezin graf i odredite ploštinu lika omeđenog grafom te funkcije i osi Ox .