Rješenja završnog ispita iz Matematike 1

23. siječnja 2008.

Pitanja iz 3. ciklusa

1. (2 boda) Naći desnu kosu asimptotu krivulje $y = x \operatorname{arctg} x$.
Rješenje:

$$\begin{aligned}
k &= \lim_{x\to\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} \\
l &= \lim_{x\to\infty} x \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} x = \lim_{x\to\infty} x(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}) = \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2}{x^2+1} = -1.
\end{aligned}$$

Desna kosa asimptota je $y = \frac{\pi}{2} x - 1$.

2. (3 boda) Osnovica trapeza je promjer polukružnice $x^2 + y^2 = R^2$, $y \geq 0$, a ostala dva vrha nalaze se na toj polukružnici. Kolika je maksimalna ploština takvog trapeza?
Rješenje: $P(x) = \frac{2R+2x}{2}\sqrt{R^2 - x^2} = (R + x)\sqrt{R^2 - x^2}$, $0 \leq x < R$. Derivacijom dobivamo $P'(x) = \sqrt{R^2 - x^2} + (R + x)\frac{-2x}{2}\sqrt{R^2 - x^2} = \frac{R^2 - Rx - 2x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}$.

$P'(x) = 0$ povlači $2x^2 + Rx - R^2 = 0$, pa su kandidati za rješenja $x = R\left(\frac{-1\pm 3}{4}\right)$. Negativni kandidat $x = -R$ ne zadovoljava uvjet $0 \leq x < R$, pa zaključujemo da je jedini kandidat za rješenje $x = \frac{R}{2}$. Iz tablice predznaka prve derivacije zaključujemo da se radi o lokalnom maksimumu, pa je $x = \frac{R}{2}$ zbilja rješenje.

Dakle, maksimalna je površina $P(x) = R^2 \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

3. (3 boda) Naći područje definicije, lokalne ekstreme, točke infleksije (pregiba) i asimptote, te skicirati kvalitativni graf funkcije $f(x) = (x^2 - 3)e^x$.
Rješenje: Očito je $D(f) = \mathbb{R}$.

$\lim_{x\to-\infty} (x^2 - 3)e^x = \lim_{u\to+\infty} (u^2 - 3)e^{-u} = \lim_{u\to\infty} \frac{u^2-3}{e^u} = \lim_{u\to\infty} \frac{2u}{e^u} = \lim_{u\to\infty} \frac{2}{e^u} = 0$. Zaključujemo da je lijeva horizontalna asimptota $y = 0$.

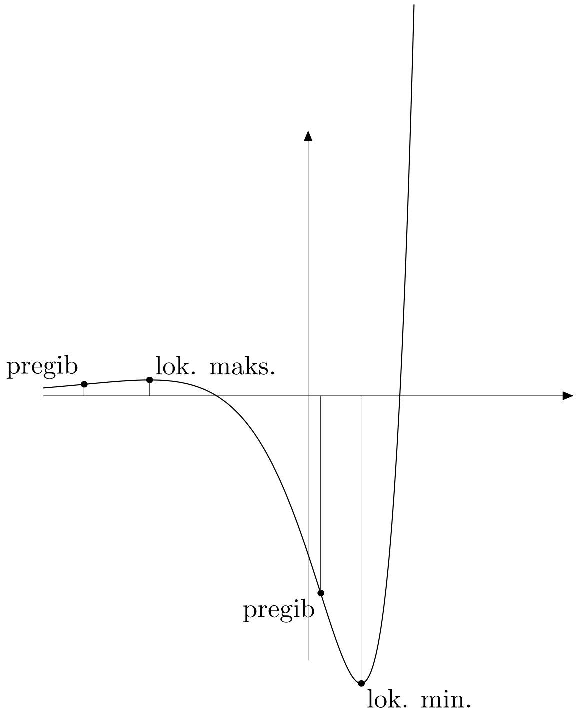
Kako je $\lim_{x\to\infty} (x^2 - 3)e^x = +\infty$, a i $\lim_{x\to\infty} \frac{(x^2-3)e^x}{x} = +\infty$, zaključujemo da graf funkcije f nema desnu kosu asimptotu.

$f'(x) = 2xe^x + (x^2 - 3)e^x = (x^2 + 2x - 3)e^x$, pa iz $f'(x) = 0$ izlazi $x_1 = 1$ i $x_2 = -3$. Analiziramo područja pozitivnosti i negativnosti funkcije f' i dobivamo sljedeće:

	$-\infty$		-3		1		∞
f'		+		-		+	
f		↗	lok. max.	↘	lok. min.	↗	

Drugom derivacijom $f''(x) = (2x + 2)e^x + (x^2 + 2x - 3)e^x = (x^2 + 4x - 1)e^x$ dobivamo točke pregiba, $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{5}$.

Graf funkcije izgleda ovako:



4. (2 boda) Naći a takav da je

$$\int_1^a \frac{\ln^3 x}{x}\, dx = 4.$$

Rješenje:

$$\int_1^a \frac{\ln^3 x}{x} dx = \frac{1}{4}\ln^4 x \Big|_1^a = 4$$
$$\ln^4 a = 16$$
$$\ln a = \pm 2$$
$$a = e^{\pm 2}.$$

5. (2 boda) Izračunati integral

$$\int x \operatorname{arctg} x\, dx.$$

Rješenje:

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{arctg} x dx &= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1} dx \\ &= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx \\ &= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + c \\ &= \frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + c.\end{aligned}$$

6. (2 boda) Izračunati integral

$$\int \frac{x-1}{x^3+x}\, dx.$$

Rješenje: Rastavljamo na parcijalne razlomke: $\frac{x-1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$, $x - 1 = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx$, $A + B = 0$, $C = 1$, $A = -1$, pa zaključujemo da je $B = 1$. Računamo integral: $\int \frac{x-1}{x^3+x} dx = -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{x dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + c.$

7. (2 boda) Izračunati (izvesti formulu!) integral

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Rješenje:

1. način.

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{c} t=\arcsin\frac{x}{a} \\ x=a\sin t \\ dx=a\cos t\,dt \end{array} \right| = \int \sqrt{a^2\cos^2 t}\,a\cos t\,dt = a^2\int \cos^2 t\,dt$$

$$= a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = a^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)+c$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{a^2}{2}\frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}+c$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+c.$$

2. način.

$$I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=\left|\begin{array}{cc} u=x & du=dx \\ dv=\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} & v=-\sqrt{a^2-x^2}\end{array}\right| = a^2\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+x\sqrt{a^2-x^2}-\underbrace{\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx}_{=I}$$

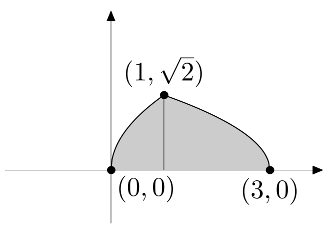
$$I=\frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+c.$$

3. način.

Pretpostavimo rješenje u obliku $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=(A+Bx)\sqrt{a^2-x^2}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$. Nakon deriviranja dobivamo $\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}=B\sqrt{a^2-x^2}+(A+Bx)\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{a^2-x^2}}$, iz čega izlazi $a^2-x^2=Ba^2-Bx^2-Ax-Bx^2+\lambda=2Bx^2-Ax+Ba^2-\lambda$, pa je $B=\frac{1}{2}$, $A=0$ i $\lambda=\frac{a^2}{2}$. Iz toga dobivamo da je $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+c$.

8. (2 boda) Izračunati ploštinu lika omeđenog s krivuljama $y=\sqrt{2x}$, $y=\sqrt{3-x}$ i osi Ox. Nacrtati sliku!

Rješenje:



1. način: $P=\int\limits_0^1\sqrt{2x}\,dx+\int\limits_1^3\sqrt{3-x}\,dx=\sqrt{2}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^1-\frac{(3-x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_1^3=2\frac{\sqrt{2}}{3}+4\frac{\sqrt{2}}{3}=6\frac{\sqrt{2}}{3}=2\sqrt{2}.$

2. način: $P=\int\limits_0^{\sqrt{2}}(3-y^2-\frac{y^2}{2})\,dy=\int\limits_0^{\sqrt{2}}(3-\frac{3y^2}{2})\,dy=3\sqrt{2}-\frac{y^3}{2}\Big|_0^{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}.$

9. (2 boda) Izračunati obujam (volumen) tijela koje nastaje vrtnjom oko osi Ox lika omeđenog s pravcima $y=0$, $x=\sqrt{2}$ te krivuljom $x^2-y^2=1$, $x,y>0$.

Rješenje: $V=\pi\int\limits_1^{\sqrt{2}}(x^2-1)\,dx=\pi(\frac{x^3}{3}-x)\Big|_1^{\sqrt{2}}=\pi(\frac{2\sqrt{2}}{3}-\sqrt{2}-\frac{1}{3}+1)=\frac{\pi}{3}(2-\sqrt{2}).$

Pitanja iz cijelog gradiva

10. (3 boda) Naći ona rješenja jednadžbe $z^3 = -i$ koja zadovoljavaju uvjet $|z+i| \leq 1$.
Rješenje:

$$z^3 = \operatorname{cis}\frac{3\pi}{2}$$
$$z = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}k\pi\right), \qquad k = 0, 1, 2$$
$$z_1 = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$$
$$z_2 = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$
$$z_3 = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

$|z_2 + i| = |\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}| = 1$ i $|z_3 + i| = |\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}| = 1$, pa zaključujemo da i z_2 i z_3 zadovoljavaju uvjet iz zadatka. Trivijalno, z_1 ne zadovoljava uvjet.

11. (3 boda) a) Napisati definiciju inverzne matrice kvadratne matrice $\mathbf{A}$.
b) Naći inverznu matricu za matricu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

c) Služeći se inverznom matricom riješiti sustav $\mathbf{A}\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, za $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Rješenje: Pod a), matrica $\mathbf{A}^{-1}$ je inverzna matrica kvadratne matrice $\mathbf{A}$ ako je

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

(Dovoljna je i samo jedna jednakost).
Pod b)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 12 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 17 & 2 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] = [\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}]$$

Pod c) $\overrightarrow{x} = \mathbf{A}^{-1}\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 17 & 2 & -12 \\ 7 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

12. (3 boda) a) Napisati definiciju derivacije funkcije f.
b) Služeći se definicijom derivacije dokazati da je $(x^2)' = 2x$.
c) Naći jednadžbu tangente na krivulju $y = x^2$, $x \geq 0$, koja s osi Ox zatvara kut od $45°$.

Rješenje:

Pod a): $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Pod b): $(x^2)' = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2x+h) = 2x$.

Pod c): Neka je x_0 apscisa dirališta tangente i krivulje. Tada je $2x_0 = \operatorname{tg} 45° = 1$, pa je $x_0 = \frac{1}{2}$. Jednadžba tangente je tada $y - \frac{1}{4} = x - \frac{1}{2}$, odnosno $y = x - \frac{1}{4}$.

13. (3 boda) a) Napisati Taylorov stavak (teorem).

b) Funkciju $f(x) = e^x$ napisati u obliku

$$f(x) = T_3(x) + R_3(x),$$

gdje je $T_3(x)$ treći Taylorov polinom u razvoju oko točke 0, a $R_3(x)$ ostatak u Lagrangeovom obliku.

Rješenje: Za a) dio vidi stavak 5 u 11. knjižici na stranici broj 9.

Pod b): $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{e^{x_1}}{4!}x^4$, za neki $x_1 \in \langle 0, x\rangle$ ili $x_1 \in \langle x, 0\rangle$.

14. (3 boda) a) Služeći se definicijom derivacije i stavkom (teoremom) srednje vrijednosti integralnog računa dokazati da za funkciju f neprekinutu na $[a, b]$, za svaki $x \in \langle a, b\rangle$, vrijedi

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = f(x),$$

pri čemu je $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$.

b) Služeći se izvedenim pod a) dokazati Leibniz-Newtonovu formulu.

Rješenje:

Za a) dio vidi dokaz stavka 13 u 11. knjižici na stranici broj 25.

Za b) dio vidi dokaz stavka 14 u 11. knjižici, također na stranici broj 25.