

# Rješenja završnog ispita iz Matematike 1

Održanog 21. siječnja 2008.

## Pitanja iz 3. ciklusa

1. (2 boda) Nađite pravokutnik maksimalne ploštine čija jedna stranica leži na osi  $Ox$ , a preostala dva vrha se nalaze na krivulji  $y = \sqrt{4 - x^2}$ . Izračunajte ploštinu tog pravokutnika.

Rješenje:  $P = ab$ ,  $4 = \frac{a^2}{4} + b^2$ ,  $b^2 = \frac{P^2}{a^2}$ , pa je  $4P^2 + a^4 = 16a^2$ . Slijedi da je  $4P = a\sqrt{16 - a^2}$ , pa je  $4P' = \sqrt{16 - a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{16 - a^2}} = \frac{16 - 2a^2}{\sqrt{16 - a^2}}$ , pa je  $2P' = \frac{8 - a^2}{\sqrt{16 - a^2}}$ , iz čega slijedi da je  $a = 2\sqrt{2}$ , pa je  $b = \sqrt{2}$  i  $P = 4$ .

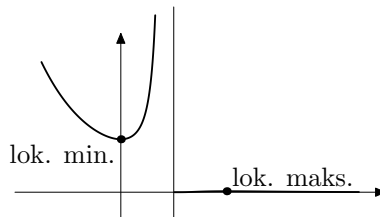
Trivijalno je to maksimum površine, jer je površina pozitivna na  $\langle 0, 4 \rangle$  i nema drugih potencijalnih ekstrema na tom intervalu.

2. (3 boda) Nađite područje definicije, lokalne ekstreme, asimptote i ponašanje na rubovima domene, te skicirajte kvalitativni graf funkcije

$$f(x) = e^{\frac{x^2}{1-x}}.$$

Rješenje:  $f(x) = e^{\frac{x^2}{1-x}}$ ,  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ . Limesi u  $+\infty$  i  $1^+$  su 0, u  $-\infty$  i  $1^-$  su 0.

Kako je  $f'(x) = e^{\frac{x^2}{1-x}} \left( \frac{2x(1-x) + x^2}{(1-x)^2} \right) = f(x) \frac{2x-x^2}{(1-x)^2}$ , to su ekstremi u 0 i 2, redom minimum i maksimum.



3. (2 boda) Izračunajte integral

$$\int \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}} dx.$$

Rješenje:  $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}} dx = \int \frac{2t+1}{\sqrt{t^2+9}} = 2\sqrt{t^2+9} + \ln(t + \sqrt{t^2+9}) + C$ , a to je  $= 2\sqrt{x^2 - 2x + 10} + \ln(x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 10}) + C$ .

4. (2 boda) Izračunajte integral

$$\int e^{-x} \sin x dx.$$

Rješenje:  $I := \int e^{-x} \sin x dx = -e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \cos x dx = -e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - I$ , pa je  $I = \frac{-1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) + c$ .

5. (2 boda) Izračunajte integral

$$\int \frac{dx}{x^3 + x^2}.$$

Rješenje:  $\int \frac{dx}{x^3+x^2} = \int \frac{1}{x^2} \frac{dx}{x+1} = \int \frac{-x+1}{x^2} + \frac{1}{x+1} dx = -\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|1+x| + c = \ln\left|\frac{1+x}{x}\right| - \frac{1}{x} + c$ .

6. (4 boda)

- a) Iskažite teorem (stavak) srednje vrijednosti integralnog računa i geometrijski interpretirajte taj teorem.
- b) Služeći se definicijom derivacije i teoremom srednje vrijednosti integralnog računa dokažite da za funkciju  $g$ , neprekinutu na  $[a, b]$ , za svaki  $x \in \langle a, b \rangle$ , vrijedi

$$\frac{d}{dx} \int_a^x g(t) dt = g(x).$$

- c) Služeći se izvedenim pod b), dokažite Newton-Leibnizovu formulu.

Rješenje: a) Za neprekinutu funkciju  $f$  na intervalu  $[a, b]$  vrijedi:  $\exists \xi \in [a, b], (b-a)f(\xi) = \int_a^b f(x)dx$ . Geometrijska interpretacija: u području integracije neprekinute funkcije postoji točka  $\xi$  za koju je ploština ispod funkcije  $f$  jednaka ploštini pravokutnika čije su stranice duljine  $(b-a)$  i  $f(\xi)$ .

b)  $\frac{d}{dx} \int_a^x g(t)dx = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} g(t)dt - \int_a^x g(t)dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} g(t)dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hf(\xi_h)}{h} = f(x)$ , jer je  $\xi_h \in [x, x+h]$  za svaki  $h > 0$ , pa mora biti  $\lim_{h \rightarrow 0} \xi_h = x$ .

c) Definiramo  $\Phi(x) = \int_a^x g(t) dt$ . Kako je  $\Phi'(x) = g(x)$ , to je  $\Phi$  primitivna funkcija za  $g$ , pa je svaka primitivna funkcija  $F$  za  $g$  oblika  $F(x) = \Phi(x) + C$ . Kako je  $\Phi(a) = 0 = F(a) + C$  i  $\Phi(b) = F(b) + c$ , to je  $F(b) - F(a) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b g(t) dt$ .

7. (2 boda) Izračunajte integral

$$\int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{9-x^2} dx.$$

Rješenje:  $\int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{9-x^2} dx$ , uz supstituciju  $x = 3 \sin t$  i  $dx = 3 \cos t dt$ , postaje  $= 9 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t dt = 9 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2}) dt$ . To je onda  $= \frac{3}{4}\pi + \frac{9}{4} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3}{4}\pi + \frac{9}{8}\sqrt{3}$ .

8. (3 boda) Zadan je lik  $P$  omeđen krivuljama  $y = e^x, y = e^{-x} + 2$  i osi  $Oy$ . Skicirajte lik  $P$  i izračunajte njegovu ploštinu.

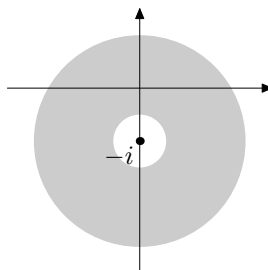
Rješenje:  $e^x = e^{-x} + 2$ , pa uz supstituciju  $t = e^x$  dobivamo jednadžbu  $t^2 - 2t - 1 = 0$ , pa je  $t = 1 + \sqrt{2}$ , tj.  $x = \ln(1 + \sqrt{2})$ . Tako je ploština  $\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} e^{-x} + 2 - e^x dx$ , a to je  $= 2 \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{1}{1+\sqrt{2}} - (1 + \sqrt{2}) + 2 = 2 \ln(1 + \sqrt{2}) + 2 - 2\sqrt{2}$ .

## Pitanja iz cijelog gradiva

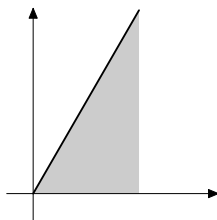
9. (2 boda) Skicirajte u kompleksnoj ravnini skupove:

- a)  $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z+i| \leq 4\}$ .
- b)  $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3}\}$ .

Rješenje: a) je prsten oko  $-i$  unutarnjeg polumjera 1, vanjskog polumjera 4.



b) je u prvom kvadrantu, područje između polupravca pozitivnih realnih brojeva u kompleksnoj ravnini i polupravca kroz ishodište koji s realnom osi zatvara kut od  $\frac{\pi}{3}$ .



10. (3 boda) Postoje li inverzi sljedećih matrica:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ?$$

Ako je matrica invertibilna, izračunajte njen inverz.

Rješenje: Matrica  $\mathbf{A}$  nije invertibilna (dva jednaka retka). Inverz matrice  $\mathbf{B}$  je  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

11. (4 boda) Izračunajte limese:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin(x)}{x - \sin(2x)}$

b)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}(x)}{\operatorname{tg}(5x)}$

Rješenje: a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1 - \frac{\sin 2x}{x}} = 1$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos 5x}{\sin 5x \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{\cos x} \stackrel{[L'H]}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{5 \sin 5x}{\sin x} = 5$ .

12. (2 boda) Odredite Taylorov polinom  $T_6(x)$  za funkciju

$$f(x) = \operatorname{ch}(3x)$$

u točki  $c = 0$ .

Rješenje:  $f(x) = \operatorname{ch}(3x) = \frac{e^{3x} + e^{-3x}}{2}$ , pa je  $T_6(x) = \sum_{n=0}^6 \frac{3^n + (-1)^n 3^n}{2(n!)} x^n = 1 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{8}x^4 + \frac{81}{80}x^6$ .

13. (4 boda) Zadana je funkcija

$$y(x) = x\sqrt{1-x^2}, \quad x > 0.$$

Nađite njene ekstreme, skicirajte njezin graf i odredite ploštinu lika omeđenog grafom te funkcije i osi  $Ox$ .

Rješenje: Ekstremi su rub domene 1 (0 nije uključena u domenu) i nultočke derivacije. Gledamo  $y' = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ , pa su nultočke derivacije  $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Ekstrem je maksimum u  $\sqrt{\frac{1}{2}}$  (jer je  $x > 0$ ). Ploština lika je  $P = \int_0^1 y(x) dx = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx$ , a to je  $= \frac{1}{3}$ .

