Rješenja ponovljenog završnog ispita iz Matematike 1

održanog 4. veljače 2008.

Pitanja iz 3. ciklusa

1. (2 boda) S pomoću Taylorove formule prikazati polinom

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$

kao polinom u potencijama $(x-3)$.

Rješenje: Funkciju f treba prikzati u obliku Taylorovog polinoma oko točke $x = 3$. Zanimaju nas, dakle, vrijednosti $f(3)$, $f'(3)$, $f''(3)$ i $f'''(3)$. Uočimo da su sve ostale derivacije višeg reda jednake nuli. Dakle, $f(3) = 40$, $f'(3) = 34$, $f''(3) = 20$ i $f'''(3) = 6$. Stoga, pošto je $f(x) = f(3) + f'(3)(x-3) + \frac{f''(3)}{2}(x-3)^2 + \frac{f'''(3)}{6}(x-3)^3$, dobivamo rješenje

$$f(x) = 40 + 34(x-3) + 10(x-3)^2 + (x-3)^3.$$

2. (3 boda) Koliko je minimalno oplošje valjka (bez gornje baze) ako mu je obujam (volumen) 8π?

Rješenje: Volumen valjka je $V = hr^2\pi$, pa je $h = \frac{8}{r^2}$. Oplošje valjka dano je formulom $O = r^2\pi + 2rh\pi$. Uvrstimo relaciju između r i h u izraz za oplošje, pa dobivamo $O(r) = r^2\pi + \frac{16\pi}{r}$. Deriviramo i dobivamo $O'(r) = 2r\pi - \frac{16\pi}{r^2}$. Kandidat za ekstremalno oplošje je, stoga, $r = 2$. $O''(r) = 2\pi + \frac{32\pi}{r^3}$,što je u $r = 2$ pozitivno, pa se radi o minimumu. Dakle, minimalno oplošje je $O(2) = 12\pi$.

3. (3 boda) Naći područje definicije, lokalne ekstreme, područja monotonosti i asimptote, te skicirati kvalitativni graf funkcije

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

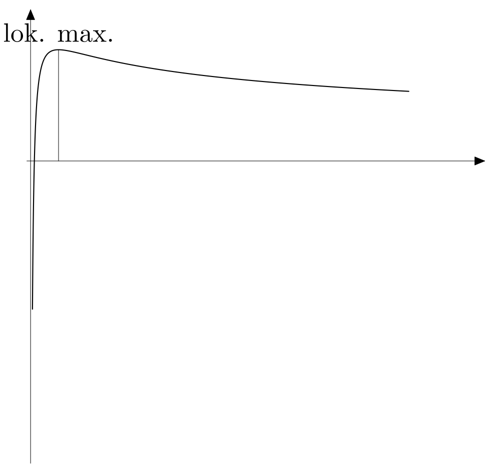
Rješenje: $D(f) = \mathbb{R}^+$. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{-\infty}{0} = -\infty$. Zaključujemo da je $x = 0$ vertikalna asimptota.

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$. Desna horizontalna asimptota je $y = 0$.

Ekstreme i monotonost nalazimo pomoću nultočaka prve derivacije. $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \ln x \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{1 - \frac{1}{2}\ln x}{x\sqrt{x}} = 0$. Nultočka derivacije je samo $x = e^2$.

	0	e^2	∞
f'	+	-	
f	$\nearrow$	$\searrow$	
		lok. max.	

Iz gornjih podatka zaključujemo da graf funkcije izgleda ovako:



4. (2 boda) Izračunati integral
$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x \, dx.$$

Rješenje:
$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x \, dx = \left| \begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \end{array} \right|$$
$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} (t^2 - t^4) dt = (\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5})\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{24} + \frac{1}{160}$$
$$= \frac{47}{480}.$$

5. (2 boda) Izračunati integral
$$\int_0^2 x^3 e^{-x^2} \, dx.$$

Rješenje:
$$\int_0^2 x^3 e^{-x^2} dx = \left| \begin{array}{c} x^2 = t \\ 2x \, dx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_0^4 t e^{-t} dt$$
$$= \frac{1}{2}(-te^{-t}\Big|_0^4 + \int_0^4 e^{-t} dt) = \frac{1}{2}(-4e^{-4} + 1 - e^{-4})$$
$$\frac{= 1 - 5e^{-4}}{2}$$

6. (2 boda) Izračunati integral
$$\int \frac{x^4 \, dx}{x^2+1}.$$

Rješenje: $\int \frac{x^4 \, dx}{x^2+1} = \int (x^2-1)dx + \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x + c.$

7. (2 boda) Izračunati integral
$$\int \frac{2x+4}{x(x^2+2x+2)} dx.$$

Rješenje: $\frac{2x+4}{x(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$. Dobivamo $A = 2$, $C = -2$, $B = -2$.
$\int \frac{2x+4}{x(x^2+2x+2)} dx = 2\int \frac{dx}{x} - \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx = 2\ln|x| - \ln(x^2+2x+2) + c.$

8. (2 boda) Izračunati integral
$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

Rješenje: $\int_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin(\frac{1}{x}) dx = \left| \begin{array}{c} u = \frac{1}{x} \\ 2x \, du = \frac{-dx}{x^2} \end{array} \right| = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin u \, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u \, du = \cos u\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = 1.$

9. (2 boda) Naći ploštinu lika kojeg u prvom kvadrantu omeđuju krivulje $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$ i pravac $y = 2$.

Rješenje: $P = \int_0^{\sqrt{2}} (x^2 - \frac{x^2}{2}) dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} (2 - \frac{x^2}{2}) dx = \frac{x^3}{6}\Big|_0^{\sqrt{2}} + 2x\Big|_{\sqrt{2}}^{2} = \frac{2\sqrt{2}}{6} + 2(2-\sqrt{2}) - \frac{8}{6} + \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{8-4\sqrt{2}}{3}.$

Pitanja iz cijelog gradiva

10. (3 boda) Neka je $z = -2 + 2\sqrt{3}i$:

    a) Prikazati z u trigonometrijskom obliku.
    b) Izračunati z^5.
    c) Naći onu vrijednost $\sqrt[4]{z}$ koja se nalazi u trećem kvadrantu.

    Napomena: Vrijednost trigonometrijskih funkcija treba izračunati.

Rješenje: $z = 4\operatorname{cis}(\frac{2\pi}{3})$. $z^5 = 4^5\operatorname{cis}(\frac{10\pi}{3}) = 1024(\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$. $\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{4}\operatorname{cis}(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2})$, $k = 0, 1, 2, 3$. Tražena vrijednost je $\sqrt{2}\operatorname{cis}(\frac{7}{6}\pi) = \sqrt{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2})$.

11. (3 boda) Riješiti matričnu jednadžbu

$$\mathbf{X}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^{-1},$$

gdje su $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Rješenje: $\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. $\mathbf{X} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$, pa je $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

12. (3 boda)

    a) Napisati pravilo za derivaciju inverzne funkcije.
    b) Služeći se tim pravilom izvesti derivaciju funkcije $y = \arcsin x$.
    c) Služeći se L'Hospitalovim pravilom izračunati

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}.$$

Rješenje: $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ ili $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{(\sin y)'}\Big|_{y=\arcsin x} = \dfrac{1}{\cos(\arcsin x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = 1$.

13. (3 boda)

    a) Naći jednadžbu tangente na krivulju $y = \ln x$ koja je usporedna (paralelna) s pravcem koji prolazi kroz točke zadane krivulje s apscisama $x = 1$ i $x = e^2$.
    b) Iskazati Lagrangeov stavak (teorem) srednje vrijednosti diferencijalnog računa. Geometrijski interpretirati iskazani stavak.

Rješenje: Koeficijent smjera je $k = \frac{2}{e^2-1}$. $y' = \frac{1}{x}$, pa je točka kroz koju prolazi tangenta $x_0 = \frac{e^2-1}{2}$. Jednadžba tangente je, stoga, $y - \ln(\frac{e^2-1}{2}) = \frac{2}{e^2-1}(x - \frac{e^2-1}{2})$.
Lagrangeov stavak srednje vrijednosti pogledati u knjižici!

14. (3 boda)

    a) Dokazati formulu za parcijalnu integraciju.
    b) Izračunati $\int x\ln x\,dx$.

Rješenje: Dokaz formule vidjeti u knjižici.
$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c$.