Rješenja ponovljenoga završnoga ispita iz Matematike 1

održanoga 5. veljače 2009.

Pitanja iz 3. ciklusa

1. (3 boda) U kružnicu polumjera R upisan je jednakokračni trapez čija je dulja osnovica promjer kružnice i čija je površina maksimalna. Koliko iznosi ta površina? Dokažite da se radi o maksimumu!

Rješenje: Površina trapeza dana je formulom $P = \frac{1}{2}h(a+c)$, gdje je h visina, te a i c dulja, odnosno kraća osnovica. Pri upisivanju trapeza u kružnicu vrijedi $a = 2R$ i $c = 2\sqrt{R^2-h^2}$, pa površinu možemo prikazati kao funkciju visine, $P(h) = h(R+\sqrt{R^2-h^2}$. Derivacija funkcije površine je $P'(h) = R + \frac{R^2-2h^2}{\sqrt{R^2-h^2}}$, iz čega rješavajući $P'(h) = 0$ za $R > h > 0$ dobivamo $h = \frac{\sqrt{3}}{2}R$. Druga derivacija $P''(h) = \frac{2h^3-3hR^2}{(R^2-h^2)^{2/3}}$, pa je $P''(\frac{\sqrt{3}}{2}R) = -6\sqrt{3}$, iz čega zaključujemo da je ta točka maksimum.
Površina tog trapeza je $P(\frac{\sqrt{3}}{2}R) = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.

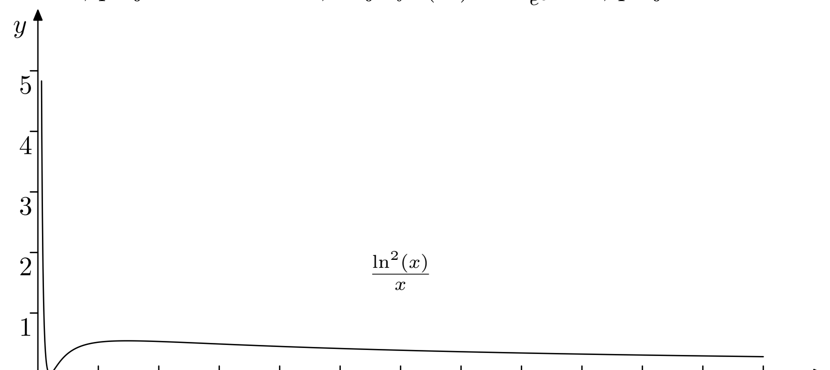
2. (3 boda) Odredite područje definicije funkcije, ispitajte ponašanje na rubu područja definicije, nađite lokalne ekstreme i asimptote, te skicirajte graf funkcije

$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}.$$

Rješenje: Područje definicije $D(f) = \langle 0, +\infty\rangle$. U smjeru $+\infty$ je:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln(x)\frac{1}{x}}{1} = 2\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 2\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Zaključujemo da je horizontalna asimptota onda pravac $y = 0$. U smjeru $x \to 0^+$ je $\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2(x)}{x} = +\infty$ očito, pa imamo i vertikalnu asimptotu $x = 0$. Derivacija $f'(x) = \frac{\ln(x)}{x}(2-\ln(x))$, pa su e^2 i 1 kandidati za ekstreme. Kako je $f''(x) = \frac{2}{x^3}(1-3\ln(x)+\ln^2(x))$, $f''(1) = 2 > 0$, pa je u 1 minimum, te je $f''(e^2) = -\frac{2}{e^6} < 0$, pa je u e^2 maksimum.



3. (2 boda) Izračunajte integral

$$\int x^2 \ln x\, dx.$$

Rješenje:

$$\int x^2\ln(x)dx = \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \int\frac{1}{3}x^3\frac{1}{x}dx = \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{1}{9}x^3 + C = \frac{1}{9}(3\ln(x)-1) + C.$$

4. (3 boda) Izračunajte integral

$$\int \frac{x^9\,dx}{x^{10}-2x^5+5}.$$

Rješenje: $\int \frac{x^9\,dx}{x^{10}-2x^5+5} = \frac{1}{5}\int \frac{x^5\,5x^4dx}{(x^5)^2-2x^5+5} = \frac{1}{5}\int \frac{x^5\,5x^4dx}{4(\frac{1}{4}(x^5-1)^2+1)} = \frac{1}{20}\int \frac{x^5\,5x^4dx}{((\frac{x^5-1}{2})^2+1)}$. Uvodimo supstituciju $w = \frac{x^5-1}{2}$, $dw = \frac{5}{2}x^4dx$, pa dobivamo $\frac{2}{20}\int \frac{(2w+1)\,2dw}{w^2+1} = \frac{1}{10}\left(\int \frac{2w\,dw}{w^2+1} + \int \frac{dw}{w^2+1}\right) = \frac{1}{10}\big(\ln(w^2+1) + \operatorname{arctg}(w)\big) + C$, a to je jednako $\frac{1}{10}\big(\ln(x^{10}-2x^5+5) + \operatorname{arctg}(\frac{1}{2}(x^5-1))\big)$.

5. (4 boda)

a) Iskažite teorem (stavak) srednje vrijednosti integralnog računa i geometrijski interpetirajte taj teorem.

b) Služeći se definicijom derivacije i teoremom srednje vrijednosti integralnog računa dokažite da za funkciju f, neprekinutu na $[a,b]$, za svaki $x \in \langle a,b\rangle$, vrijedi

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

c) Služeći se izvedenim pod b), dokažite Newton-Leibnizovu formulu.

Rješenje:

a) Neka je f integrabilna na segmentu $[a,b]$. Tada postoji $c \in [a,b]$ takav da je

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

b) Računamo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt &= \lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)}{h} \overset{\text{s.v.}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{((x+h)-x)f(\xi)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{hf(\xi)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi) \overset{\xi\in[x,x+h]}{=} f(x).\end{aligned}$$

c) Neka je $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, te neka je $F(x)$ neka primitivna funkcija od f. Tada je $F(x) = \Phi(x) + C$, pa je

$$\int_a^b f(t)dt = \Phi(b) - 0 = \Phi(b) - \Phi(a) + C - C = (\Phi(b)+C) - (\Phi(a)+C) = F(b) - F(a).$$

6. (3 boda) Izračunajte:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\sin x}$,

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\sin x}$.

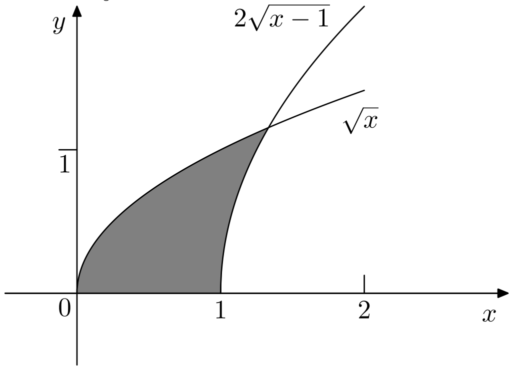
Rješenje:

a) Univerzalnom supstitucijuom $t = \operatorname{tg}(\frac{x}{2})$, $dt = \frac{t^2+1}{2}dx$, $\sin x = \frac{2t}{t^2+1}$ dobivamo da je $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\sin x} = \int \frac{dt}{t^2+t+1} = \int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2}{\sqrt{3}}\ \operatorname{tg}(\frac{x}{2}) + \frac{1}{\sqrt{3}}) + C.$

b) Uvrštavajući u Newton-Leibnizovu formulu gornji izraz dobivamo da je traženi određeni integral jednak $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

7. (2 boda) Zadan je lik P omeđen krivuljama $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x-1}$ i osi Ox. Skicirajte lik P i izračunajte njegovu ploštinu.

Rješenje: Uočimo da druga krivulja nije definirana za $x < 1$ te da se te krivulje sijeku u točki $x = \frac{4}{3}$, pa je ukupna površina $P = P_1 - P_2$, gdje je $P_1 = \int_0^{\frac{4}{3}} x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{16}{9\sqrt{3}}$ i $P_2 = 2\int_1^{\frac{4}{3}} \sqrt{x-1} dx = \frac{4}{9\sqrt{3}}$, pa je ukupna površina $P = \frac{4\sqrt{3}}{9}$.



Pitanja iz cijelog gradiva

8. (2 boda) Riješite jednadžbu $z^3 = -i$, $z \in \mathbb{C}$.

Rješenje: Kako je $z^3 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, zaključujemo da je $|z| = 1$, pa je $z_k = e^{\phi_k i}$, a mora vrijediti $3\phi_k = (2k\pi + \frac{1}{2}\pi)$, pa je $\phi_k = \frac{2}{3}k\pi + \frac{1}{6}\pi$, pa je $z_0 = i$, $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ i $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}i$.

9. (3 boda) Riješite sustav jednadžbi u ovisnosti o parametru λ:

$$\begin{cases} x + \lambda y + 2z = 1 \\ x + (2\lambda - 1)y + 3z = 1 \\ x + \lambda y + (\lambda + 3)z = 2.\lambda - 1 \end{cases}$$

Rješenje:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 2 & 1 \\ 1 & 2\lambda-1 & 3 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda+3 & 2\lambda-1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 2 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 2\lambda-2 \end{array}\right]$$
$$\overset{\lambda \neq 1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\lambda-1} & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 2\lambda-2 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2-\frac{\lambda}{\lambda-1} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\lambda-1} & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 2\lambda-2 \end{array}\right]$$
$$\overset{\lambda \neq -1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{\lambda-2}{\lambda-1} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\lambda-1} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2\frac{\lambda-1}{\lambda+1} \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1-2\frac{\lambda-2}{\lambda+1} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{\lambda+1} \\ 0 & 0 & 1 & 2\frac{\lambda-1}{\lambda+1} \end{array}\right]$$

Dakle, za $\lambda \neq -1, 1$ su rješenja $x = \frac{5-\lambda}{\lambda+1}$, $y = -\frac{2}{\lambda+1}$ i $z = 2\frac{\lambda-1}{\lambda+1}$.

Za $\lambda = 1$ sustav se reducira na $x + y + 2z = 1$, $z = 0$, što znači da ima beskonačno rješenja oblika $(t, 1-t, 0)$.

Za $\lambda = -1$ sustav nema rješenja, jer dobivamo jednadžbe $x - y + 2z = 1$ i $x - y + 2z = -3$ koje su kontradiktorne $(1 \neq -3)$.

10. (4 boda) a) Iskažite definiciju pojma derivacije funkcije f u točki x_0.
b) Koristeći $(\sin x)' = \cos x$ i formulu za derivaciju inverzne funckije izvedite formulu $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
c) Nađite jednadžbu tangente na krivulju $y = \arcsin(\sqrt{x})$ u točki $x = \frac{1}{2}$.

Rješenje:

a) Neka je f funkcija i x_0 neka točka. Ako postoji, limes

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

zovemo derivacijom funkcije f u točki x_0.

b) Označimo sa $y = \sin(x)$. Tada je $\cos(x) = \sqrt{1 - y^2}$. Derivirajući jednakost

$$\arcsin(\sin(x)) = x,$$

dobivamo $\arcsin'(y)\cos(x) = 1$, odnosno

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

c) Derivacija $f'(x) \arcsin(\sqrt{x})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$, pa u $x = \frac{1}{2}$ je $f'(\frac{1}{2}) = 1$. Kako je $f(\frac{1}{2}) = \arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$, to je jednadžba tangente $y - \frac{\pi}{4} = x - \frac{1}{2}$, odnosno $x - y = \frac{2-\pi}{4}$.

11. (2 boda) Izračunajte

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \operatorname{sh} x}{x + \operatorname{ch} x}.$$

Rješenje:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \operatorname{sh} x}{x + \operatorname{ch} x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \operatorname{ch} x}{1 + \operatorname{sh} x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 + e^x + e^{-x}}{2 + e^x - e^{-x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2e^{-x} + 1 + e^{-2x}}{2e^{-x} + 1 - e^{-2x}} = 1.$$

12. (4 boda) Zadana je funkcija

$$y(x) = xe^{-x^2}, \quad x \geq 0.$$

Nađite njene ekstreme, skicirajte njezin graf i odredite ploštinu lika omeđenog grafom te funkcije i njenom asimptotom.

Rješenje: Računamo derivaciju $y'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$, pa zaključujemo da je jedini mogući ekstrem u točki $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Druga derivacija $y''(x) = 2xe^{-x^2}(2x^2 - 3)$ daje nam podatke o točki infleksije, $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Asimptota je, u $+\infty$ pravac $y = 0$ (prema L'Hospitalu). Površina ispod krivulje je $\int_0^\infty xe^{-x^2} = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}dt = \frac{-1}{2}e^{-t}|_0^\infty = \frac{1}{2}$.