

# Ponovljeni završni ispit iz Matematike 1

5. veljače 2009.

## Pitanja iz 3. ciklusa

1. (3 boda) U kružnicu polumjera  $R$  upisan je jednakokračni trapez čija je dulja osnovica promjer kružnice i čija je površina maksimalna. Koliko iznosi ta površina? Dokažite da se radi o maksimumu!

2. (3 boda) Odredite područje definicije funkcije, ispitajte ponašanje na rubu područja definicije, nađite lokalne ekstreme i asimptote, te skicirajte graf funkcije

$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}.$$

3. (2 boda) Izračunajte integral

$$\int x^2 \ln x \, dx.$$

4. (3 boda) Izračunajte integral

$$\int \frac{x^9 \, dx}{x^{10} - 2x^5 + 5}.$$

5. (4 boda) a) Iskažite teorem (stavak) srednje vrijednosti integralnog računa i geometrijski interpretirajte taj teorem.  
b) Služeći se definicijom derivacije i teoremom srednje vrijednosti integralnog računa dokažite da za funkciju  $f$ , neprekinutu na  $[a, b]$ , za svaki  $x \in (a, b)$ , vrijedi

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) \, dt = f(x).$$

c) Služeći se izvedenim pod b), dokažite Newton-Leibnizovu formulu.

6. (3 boda) Izračunajte:

a)  $\int \frac{dx}{2 + \sin x},$

b)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \sin x}.$

7. (2 boda) Zadan je lik  $P$  omeđen krivuljama  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 2\sqrt{x-1}$  i osi  $Ox$ . Skicirajte lik  $P$  i izračunajte njegovu ploštinu.

Vrijeme pisanja je **2h 30min**. Nije dozvoljena uporaba računala niti priručnika.  
Pitanja iz cijelog gradiva nalaze se na drugoj strani.

## Pitanja iz cijelog gradiva

8. (2 boda) Riješite jednadžbu  $z^3 = -i$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .

9. (3 boda) Riješite sustav jednadžbi u ovisnosti o parametru  $\lambda$ :

$$\begin{cases} x + \lambda y + 2z = 1 \\ x + (2\lambda - 1)y + 3z = 1 \\ x + \lambda y + (\lambda + 3)z = 2\lambda - 1 \end{cases}$$

10. (4 boda)
- Iskažite definiciju pojma derivacije funkcije  $f$  u točki  $x_0$ .
  - Koristeći  $(\sin x)' = \cos x$  i formulu za derivaciju inverzne funkcije izvedite formulu  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .
  - Nađite jednadžbu tangente na krivulju  $y = \arcsin(\sqrt{x})$  u točki  $x = \frac{1}{2}$ .

11. (2 boda) Izračunajte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \operatorname{sh} x}{x + \operatorname{ch} x}.$$

12. (4 boda) Zadana je funkcija

$$y(x) = xe^{-x^2}, \quad x \geq 0.$$

Nađite njene ekstreme, skicirajte njezin graf i odredite ploštinu lika omeđenog grafom te funkcije i njenom asimptotom.