Ponovljeni 2. međuispit iz Matematike 1

5. veljače 2009.

1. (2 boda) Izračunajte:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$,

   b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n+\sqrt{n^2+n+1}}$.

2. (3 boda)

   a) Iskažite definiciju pojma ekvivalentnih neizmjerno malih veličina za $x \to x_0$.

   b) Dokažite: ako su $f(x)$ i $g(x)$ ekvivalentne neizmjerno male veličine za $x \to x_0$, te $h(x)$ neizmjerno mala veličina za $x \to x_0$, onda je

   $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{h(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{h(x)}.$$

   c) Izračunajte:

   $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3(2x)}{\ln(1+x^3)}.$$

3. (2 boda) Odredite parametre a i b uz koje je funkcija f definirana s

   $$f(x)=\begin{cases} a+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}, & x<0 \\ b, & x=0 \\ \operatorname{arctg}\frac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$$

   neprekinuta.

4. (2 boda)

   a) Iskažite definiciju pojma derivacije funkcije f u točki x_0.

   b) Koristeći definiciju derivacije izvedite

   $$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}.$$

5. (2 boda)

   a) Nađite točku na krivulji $y=\ln x$, $x\in[1,e]$ u kojoj je tangenta paralelna pravcu koji prolazi točkama krivulje s apscisama $x=1$ i $x=e$.

   b) Iskažite Lagrangeov teorem (stavak) o srednjoj vrijednosti i geometrijski interpretirajte taj teorem.

6. (2 boda) Nađite tangentu na krivulju $x^3+y^4=2xy^2$ u točki $(1,1)$.

7. (3 boda) Funkciju $f(x)=e^x$ napišite u obliku $f(x)=T_4(x)+R_4(x)$, gdje je T_4 četvrti Taylorov polinom funkcije f oko $c=0$, a $R_4(x)$ ostatak u Lagrangeovom obliku.

8. (2 boda) Izračunajte:

   $$\lim_{x\to\infty} x\cdot\left(1-\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)\right).$$

9. (2 boda) Nađite sve asimptote krivulje

   $$y=e^{\frac{1}{x^2-4x}}.$$

Vrijeme pisanja je **1h 30min**. Nije dozvoljena uporaba računala niti priručnika.