

Rješenja ponovljenoga 2. međuispita iz Matematike 1 održanoga 5. veljače 2009.

1. (2 boda) Izračunajte:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right),$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n + \sqrt{n^2 + n + 1}}.$

Rješenje:

a) $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$. Tvrđimo da je $S_n = 2 - \frac{1}{2^n}$. $S_0 = 1 = 2 - 1 = 2 - 2^0$, pa tvrdnja vrijedi u polaznom slučaju. $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2-1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{1}{2^{n+1}}$, pa matematičkom indukcijom zaključujemo da vrijedi tražena tvrdnja. Tada je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2.$$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n + \sqrt{n^2 + n + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}} = \frac{3}{1 + \sqrt{1}} = \frac{3}{2}.$

2. (3 boda)

Rješenje:

- a) Iskažite definiciju pojma ekvivalentnih neizmjerljivo malih veličina za $x \rightarrow x_0$.
b) Dokažite: ako su $f(x)$ i $g(x)$ ekvivalentne neizmjerljivo male veličine za $x \rightarrow x_0$, te $h(x)$ neizmjerljivo mala veličina za $x \rightarrow x_0$, onda je

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{h(x)}.$$

c) Izračunajte:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3(2x)}{\ln(1+x^3)}.$$

Rješenje:

a) Za funkcije $f(x)$ i $g(x)$ definirane na nekoj okolini x_0 kažemo da su ekvivalentne neizmjerljivo male veličine za $x \rightarrow x_0$ ako vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

b) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) g(x)}{g(x) h(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{h(x)}$

c) Kako je $\sin(x) \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$ za $x \rightarrow 0$, vrijedi da je $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3(2x)}{\ln(1+x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x)^3}{x^3} = 8.$

3. (2 boda) Odredite parametre a i b uz koje je funkcija f definirana s

$$f(x) = \begin{cases} a + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ b, & x = 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

neprekinuta.

Rješenje: S pozitivne strane je $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, pa je $b = \frac{\pi}{2}$. Također, kako je $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$, to je $a = \pi$.

4. (2 boda) a) Iskažite definiciju pojma derivacije funkcije f u točki x_0 .
 b) Koristeći definiciju derivacije izvedite

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Rješenje:

- a) Neka je f funkcija i x_0 neka točka. Ako postoji, limes

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

zovemo derivacijom funkcije f u točki x_0 .

$$\begin{aligned} \text{b) } \left(\frac{1}{x}\right)'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{(x_0 + \Delta x)x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{(x_0 + \Delta x)x_0\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{(x_0 + \Delta x)x_0} = \frac{-1}{x_0^2}. \end{aligned}$$

5. (2 boda) a) Nađite točku na krivulji $y = \ln x$, $x \in [1, e]$ u kojoj je tangenta paralelna pravcu koji prolazi točkama krivulje s apscisama $x = 1$ i $x = e$.
 b) Iskažite Lagrangeov teorem (stavak) o srednjoj vrijednosti i geometrijski interpretirajte taj teorem.

Rješenje:

- a) Rješavamo jednadžbu $y'(x) = \frac{y(e) - y(1)}{e - 1}$ po x . Dobivamo $\frac{1}{x} = \frac{1}{e - 1}$, pa je $x = e - 1$, tj. vrijedi $(e - 1)y'(e - 1) = y(e) - y(1)$.
 b) Neka je funkcija $f(x)$ derivabilna na segmentu $[a, b]$. Tada postoji točka $c \in [a, b]$ takva da je $(b - a)f'(c) = f(b) - f(a)$.

6. (2 boda) Nađite tangentu na krivulju $x^3 + y^4 = 2xy^2$ u točki $(1, 1)$.

Rješenje: Implicitno deriviramo, promatrajući x kao funkciju $x(y)$ (alternativno dobivamo da y' može biti bilo koja vrijednost). Dobivamo $3x^2x' + 4y^3 = 2x'y^2 + 4xy$, pa uvrštavajući točku $(1, 1)$ dobivamo $3x' + 4 = 2x' + 4$, tj. $x' = 0$, pa je tangenta $x - x_0 = x'(y_0)(y - y_0)$ zapravo pravac $x = 1$.

7. (3 boda) Funkciju $f(x) = e^x$ napišite u obliku $f(x) = T_4(x) + R_4(x)$, gdje je T_4 četvrti Taylorov polinom funkcije f oko $c = 0$, a $R_4(x)$ ostatak u Lagrangeovom obliku.

Rješenje: Derivacije funkcije $f^{(n)}(x) = e^x = f(x)$, pa je $T_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$. Ostatak u Lagrangeovom obliku je tada $R_4(x) = \frac{e^\xi}{120}x^5$, gdje je $\xi \in [0, x]$ za $x \geq 0$, odnosno $[x, 0]$, ako je $x \leq 0$.

8. (2 boda) Izračunajte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(1 - \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)\right).$$

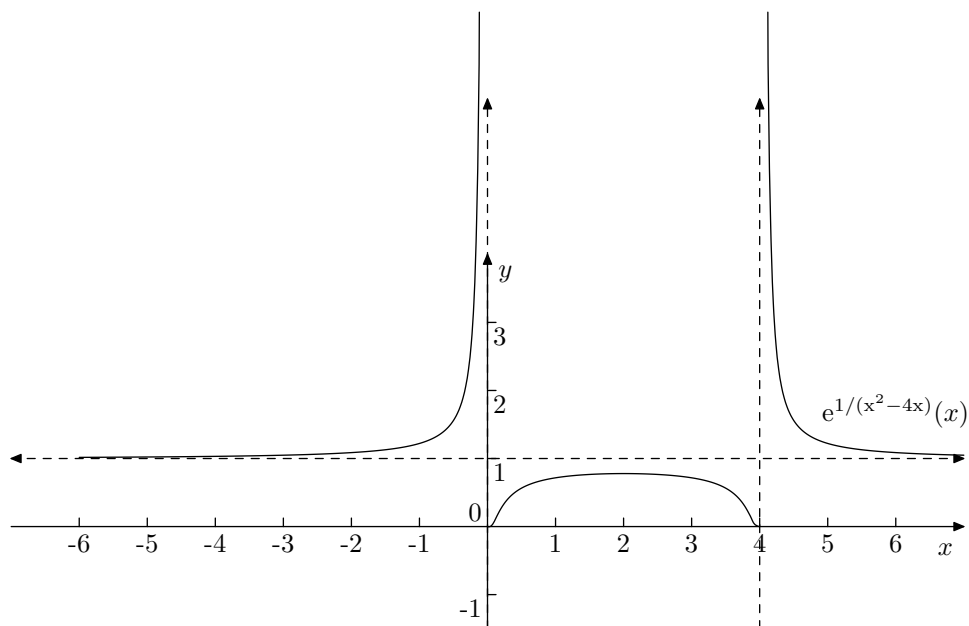
Rješenje:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(1 - \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)\right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \stackrel{[L'H]}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-1}{\left(e + \frac{1}{x}\right)^2} \cdot \frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{\left(e + \frac{1}{x}\right)} = -\frac{1}{e}. \end{aligned}$$

9. (2 boda) Nađite sve asimptote krivulje

$$y = e^{\frac{1}{x^2-4x}}.$$

Rješenje:



Kako je $\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow 4^+} y(x) = +\infty$, to su pravci $x = 0$ i $x = 4$ vertikalne asimptote s donje, odnosno s gornje strane. Pravac $y = 1$ je obostrana horizontalna asimptota jer je $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = 1$, a $\lim_{x \rightarrow 4^-} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 0$ nema asimptote.