Rješenja ponovljenoga 1. međuispita iz Matematike 1

održanoga 5. veljače 2009.

1. (2 boda) Izračunajte $\frac{(1-\sqrt{3}\,i)^{15}}{(-1+i)^{29}}$ (i napišite u obliku $a+bi$).

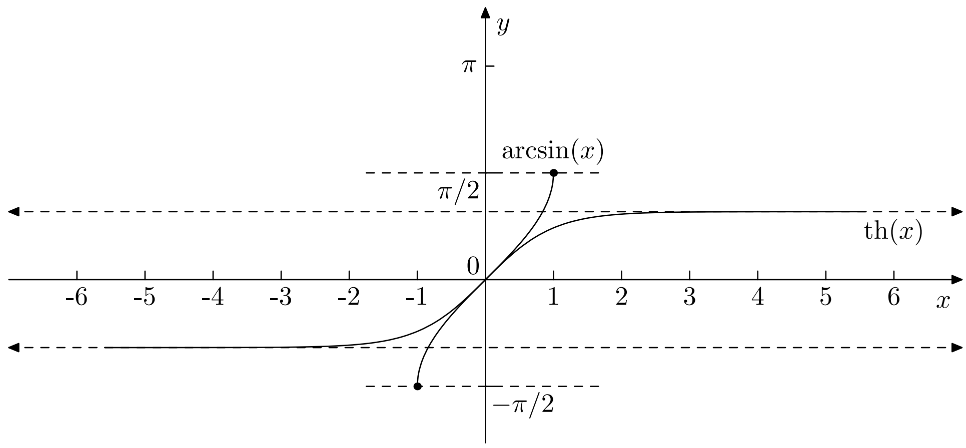
Rješenje: $A=(1-\sqrt{3}i)^{15}=2^{15}(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{15}=2^{15}e^{-15\frac{\pi}{3}i}=-2^{15}$

$B=(-1+i)^{29}=2^{\frac{29}{2}}(-\frac{1}{\sqrt{2}+\frac{i}{\sqrt{2}}})^{29}=2^{14}\sqrt{2}e^{29\frac{3}{4}i\pi}=2^{14}\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$

$\frac{A}{B}=-\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}=1+i$

2. (3 boda)
   a) Nacrtajte graf i odredite sliku funkcije $f(x)=\arcsin(x)$.
   b) Nacrtajte graf i odredite sliku funkcije $g(x)=\operatorname{th}(x)$.
   c) Koristeći definiciju funkcije sinus hiperbolički prikažite funkciju $h(x)=\operatorname{arsh}(x)$ pomoću funkcije prirodnog logaritma ln.

Rješenje:



a) Slika $f(x)=\arcsin(x)$ je $\operatorname{Im} f=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

b) Slika $g(x)=\operatorname{th}(x)$ je $\operatorname{Im} g=[-1,1]$.

c) Neka je $y=e^{\operatorname{arsh}(x)}$. Tada je $\operatorname{sh}(y)=\frac{1}{2}(y+y^{-1})=\frac{y^{-1}}{2}(y^2-1)$. Kako je $\operatorname{sh}(y)=x$, to je $2xy=y^2-1$, tj. $y^2-2xy-1=0$. Slijedi da je $y_{1,2}=\frac{1}{2}(2x\pm\sqrt{4x^2+4})=x\pm\sqrt{x^2+1}$. Kako je $y>0$, to uzimamo samo rješenje sa $+$, pa je $\operatorname{arsh} x=\ln(y)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

3. (2 boda) Izračunajte i dokažite matematičkom indukcijom

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}^n, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Rješenje: Neka je $\mathbf{A}_n:=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}^n$, za svaki $n\in\mathbb{N}$. Tvrdimo da je $\mathbf{A}_n=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2n & 1\end{bmatrix}$. Za $n=1$ tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve $n=1,\ldots,k$. Promotrimo $\mathbf{A}_{k+1}=\mathbf{A}_k\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$. Po pretpostavci indukcije je $\mathbf{A}_k=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2k & 1\end{bmatrix}$. Tada je $\mathbf{A}_{k+1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2k & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot1+0\cdot2 & 1\cdot0+0\cdot1\\ 2k\cdot1+1\cdot2 & 2k\cdot0+1\cdot1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2(k+1) & 1\end{bmatrix}$, što je i trebalo pokazati.

4. (4 boda)
   a) Izračunajte determinantu matrice

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 4 & 6 & 8 & 10\\ -2 & 0 & 6 & 8 & 10\\ -2 & -4 & 0 & 8 & 10\\ -2 & -4 & -6 & 0 & 10\\ -2 & -4 & -6 & -8 & 0\end{bmatrix}.$$

   b) Iskažite Binet-Cauchyev teorem (stavak).
   c) Ako je $\det\mathbf{A}=a$, gdje je $a\neq 0$, koristeći Binet-Cauchyev teorem izvedite formulu za $\det\mathbf{A}^{-1}$.

Rješenje:

a)
$$\det(\mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ -2 & 0 & 6 & 8 & 10 \\ -2 & -4 & 0 & 8 & 10 \\ -2 & -4 & -6 & 0 & 10 \\ -2 & -4 & -6 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \det \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 0 & 4 & 12 & 16 & 20 \\ 0 & 0 & 6 & 16 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$
$$= 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 = 3840.$$

b) Za $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ kvadratne matrice reda m vrijedi:

$$\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}.$$

c) $1 = \det \mathbf{I} = \det \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \det A^{-1} \det \mathbf{A} = a \det A^{-1}$, pa je $\frac{1}{a} = \det A^{-1}$.

5. (2 boda) Izračunajte inverz matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Rješenje:

$$[\,\mathbf{A} \mid \mathbf{I}\,] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 9 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 7 & 5 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 11 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 11 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 11 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -\frac{1}{2} & \frac{11}{2} & -\frac{9}{2} & 0 & 0 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -5 & 4 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 16 & -13 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -\frac{1}{2} & \frac{11}{2} & -\frac{9}{2} & 0 & 0 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -5 & 4 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 16 & -13 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & -11 & 9 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim [\,\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1}\,].$$

Dakle, $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 5 & -2 \\ 16 & -13 & -7 & 3 \\ 5 & -4 & 0 & 0 \\ -11 & 9 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

6. (2 boda) a) Iskažite definiciju pojma linearne nezavisnosti vektora.

b) Jesu li vektori $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 11 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ linearno nezavisni? Dokažite!

Rješenje:

a) Za skup vekotar $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ kažemo da je linearno nezavisan ako jednadžba $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$ ima jedinstveno rješenje $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

b) Kako je $\det \begin{bmatrix} -3 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} = -3(1\cdot(-2)-(-4)\cdot(-2))+2(2\cdot(-2)-1\cdot 11) = 30-30 = 0$, vektori su zavisni.

7. (3 boda) Riješite sustav jednadžbi u ovisnosti o realnom parametru λ:

$$\begin{cases} x + \lambda y + 2z = 1 \\ x + (2\lambda - 1)y + 3z = 1 \\ x + \lambda y + (\lambda+3)z = 2\lambda - 1. \end{cases}$$

Rješenje:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 2 & 1 \\ 1 & 2\lambda-1 & 3 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda+3 & 2\lambda-1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 2 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 2\lambda-2 \end{array}\right]$$
$$\overset{\lambda\neq 1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\lambda-1} & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 2\lambda-2 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2-\frac{\lambda}{\lambda-1} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\lambda-1} & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 2\lambda-2 \end{array}\right]$$
$$\overset{\lambda\neq -1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{\lambda-2}{\lambda-1} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\lambda-1} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2\frac{\lambda-1}{\lambda+1} \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1-2\frac{\lambda-2}{\lambda+1} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{\lambda+1} \\ 0 & 0 & 1 & 2\frac{\lambda-1}{\lambda+1} \end{array}\right]$$

Dakle, za $\lambda \neq -1, 1$ su rješenja $x = \frac{5-\lambda}{\lambda+1}$, $y = -\frac{2}{\lambda+1}$ i $z = 2\frac{\lambda-1}{\lambda+1}$.

Za $\lambda = 1$ sustav se reducira na $x + y + 2z = 1$, $z = 0$, što znači da ima beskonačno rješenja oblika $(t, 1-t, 0)$.

Za $\lambda = -1$ sustav nema rješenja, jer dobivamo jednadžbe $x - y + 2z = 1$ i $x - y + 2z = -3$ koje su kontradiktorne $(1 \neq -3)$.

8. (2 boda) Odredite svojstvene/vlastite vrijednosti i svojstveni/vlastiti vektor koji pripada najvećoj svojstvenoj/vlastitoj vrijednosti za matricu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Rješenje: Kako je $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda)$, pa su svojstvene/vlastite vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ brojevi 2, 3 i 4. Najveća svojstvena vrijednost je 4, za koju dobivamo sustav:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

kojemu je jedno netrivijalno rješenje $(1, 2, 2)$, što je ujedno i svojestveni/vlastiti vektor matrice $\mathbf{A}$ za svojstvenu/vlastitu vrijednost 4.