

Rješenja drugog međuispita iz Matematike 1

održanog 22. studenog 2007.

1. (2 boda) a) Napisati definiciju funkcije $f(x) = \operatorname{ch} x$ i izračunati do kraja vrijednost $\operatorname{ch}(\ln 2)$. (Izračunati do kraja!)
b) Skicirati graf funkcije $y = \operatorname{ch}(x + 2) - 1$.

Rješenje: a) $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{ch}(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4}$
b) Graf dodiruje x -os u točki $(-2, 0)$ i ide eksponencijalno prema gore u oba smjera.

2. (2 boda) Zadana je funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \left(\frac{2 - \sin x}{2 + \sin x} \right)$. Ispitati je li ta funkcija parna, neparna ili nije ni jedno ni drugo.

Rješenje:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln \left(\frac{2 - \sin(-x)}{2 + \sin(-x)} \right) = \ln \left(\frac{2 + \sin x}{2 - \sin x} \right) \\ &= -\ln \left(\frac{2 - \sin x}{2 + \sin x} \right) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Zaključujemo da je funkcija **neparna**.

3. (2 boda) Naći područje definicije $D(f)$ i sliku $\operatorname{Im}(f)$ funkcije

$$f(x) = \arcsin(\sqrt{\ln x}).$$

Rješenje: Iz $x > 0$ i $0 \leq \sqrt{\ln x} \leq 1$ zaključujemo da je $x \in [1, e]$, pa je to domena od f . Kako je f rastuća funkcija (koa kompozicija rastućih funkcija) i $f(1) = 0$, $f(e) = \frac{\pi}{2}$, to je $\operatorname{Im} f = [0, \frac{\pi}{2}]$.

4. (2 boda) a) Napisati definiciju limesa niza/slijeda.
b) Izračunati

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} + 3 \cdot 4^n}{5^{n-1} + 2 \cdot 3^n}.$$

Rješenje: a) Niz (a_n) ima limes $L \in \mathbb{R}$ ako $(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(|a_n - L| < \epsilon)$. Alternativno, niz (a_n) ima limes $L \in \mathbb{R}$ ako se izvan svakog okoliša broja L nalazi samo konačno mnogo članova tog niza.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} + 3 \cdot 4^n}{5^{n-1} + 2 \cdot 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + 3 \cdot (\frac{4}{5})^n}{\frac{1}{5} + 2 \cdot (\frac{3}{5})^n} = 25$.

5. (2 boda) Izračunati:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{2x} - 1}{x} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x} \right) \right).$$

Rješenje: Kako je $e^{2x} - 1 \sim 2x$ i $\operatorname{arctg}(\frac{1}{x}) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ kada $x \rightarrow 0^+$, to je: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{2x} - 1}{x} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$.

6. (2 boda) Izračunati:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{3 \operatorname{ctg} x}.$$

Rješenje: $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{3 \operatorname{ctg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left((1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \right)^{3 \cos x} = e^3$

7. (2 boda) a) Napisati definiciju neprekinitosti funkcije u točki.
 b) Koliki treba biti a da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{x} & \text{za } x < 0, \\ 2e^x & \text{za } x \geq 0 \end{cases}$$

bude neprekinuta?

- Rješenje: a) Funkcija je neprekinuta u točki x_0 ako je $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
 b) Očito je $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$. Mora biti i $\lim_{x \rightarrow 0^-}$, tj. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(ax)}{x} = 2e^0$, pa je $a = 2$.

8. (2 boda) a) Napisati definiciju derivacije funkcije u točki.
 b) Dokazati formulu $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

Rješenje: a) $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

b) $(f \cdot g)'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0 + h) + f(x_0)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} g(x_0 + h) \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + f(x_0) \cdot \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0).$$

U predzadnjem retku $g(x_0 + h) \rightarrow g(x_0)$, jer je g derivabilna, dakle neprekinuta.

9. (2 boda) Naći derivaciju funkcije

$$y = \operatorname{arctg}(\sqrt{e^x + 1}).$$

Izračunati $y'(\ln 2)$. (Izračunati do kraja!)

Rješenje: $y' = \frac{1}{1+e^x+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{e^x+1}} \cdot e^x$. $y'(\ln 2) = \frac{1}{2+e^{\ln 2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{e^{\ln 2}+1}} \cdot e^{\ln 2} = \frac{1}{4} \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot 2 = \frac{1}{4\sqrt{3}}$.

10. (2 boda) Naći jednadžbu tangente na krivulju

$$x^3 + y^3 = 2xy$$

u točki $T(1, 1)$.

Rješenje: $3x^2 + 3y^2 \cdot y' = 2(y + xy')$. $y'|_T = -1$. Tangenta je $y - 1 = -(x - 1)$, tj. $y = -x + 2$.