Rješenja 2. međuispita iz Matematike 1

održanoga 26. studenog 2008.

1. (2 boda) Izračunajte

   a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots+(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

   b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+3^2+\cdots+3^n}{1+3^{n+1}}$

Rješenje: Suma prvih n članova geometrijskog reda je $S_n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, gdje je q faktor u geometrijskom redu.

a) $$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots+(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)\overset{[q=-\frac{2}{3}]}{=}\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{1}{1+\frac{2}{3}}=\frac{3}{5}.$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\frac{3+3^2+\cdots+3^n}{1+3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}3\frac{1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}}{1+3^{n+1}}\overset{[q=3]}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{3S_n}{1+3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{1-3}\frac{1-3^n}{1+3^{n+1}}=\frac{-3}{2}\frac{-1}{3}=\frac{1}{2}.$$

2. (2 boda) Izračunajte

   a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\sin x}{3x^2+1}$.

   b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x+1}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Rješenje:

a) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x\sin x}{3x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{3x^2+1}\sin x\overset{s=\sin x\in[-1,1]}{=}0\cdot s=0.$$

b) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x+1}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2x+1}(x\sin\left(\frac{1}{x}\right))=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

3. (2 boda) Odredite parametar a tako da funkcija f definirana s $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}}, & x<1\\ ax-1, & x\geq 1\end{cases}$ bude neprekinuta.

Rješenje: $\lim\limits_{x\to 1^{(-)}}e^{\frac{1}{x-1}}=0$, pa je $a\cdot 1-1=0$, iz čega slijedi da je $a=1$.

4. (4 boda)

   a) Zadana je $f(x)=|x-1|$. Koristeći definiciju obrazložite postoji li $f'(1)$.

   b) Izvedite pomoću definicije derivaciju funkcije $g(x)=e^{2x+1}$, te koristeći formulu za derivaciju inverzne funkcije izvedite derivaciju inverza od g.

Rješenje:

a) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{|h|-|0|}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$, no taj limes ne postoji (nije jedinstveno određen: s lijeva je -1, zdesna 1), pa ne postoji derivacija u 1.

b) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^{2x+2h+1}-e^{2x+1}}{h}=e^{2x+1}\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^{2h}-1}{h}=2e^{2x+1}$. Kako je $(g^{-1})'(g(x))=\frac{1}{g'(x)}$, to je $(g^{-1})'(g(x))=\frac{1}{2e^{2x+1}}=\frac{1}{2g(x)}$, pa je $(g^{-1})'(y)=\frac{1}{2y}$.

5. (2 boda) Nađite jednadžbu tangente na krivulju $\mathcal{C}\ldots\begin{cases}x=2t^3+2t^2\\ y=t^3-t\end{cases}$ paralelnu s pravcem $x-2y-1=0$.

Rješenje: Smjer tangente u točki t je $\dot{x}(t)=6t^2+4t, \dot{y}(t)=3t^2-1$. Paralelnost s pravcem zahtjeva da je $\dot{x}-2\dot{y}=0$, pa je imamo jednadžbu $6t^2+4t-6t^2+2=0$, iz čega je $t=-\frac{1}{2}$. $x(-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$, $y(-\frac{1}{2})=\frac{3}{8}$. Jednadžba tangente je $2x-4y+1=0$.

6. (2 boda) Izračunajte y' u točki $(1,1)$ ako je $y=y(x)$ zadana implicitno s

$$x^y+e^{x-1}=\sqrt{y}+1.$$

Rješenje: $e^{y\ln x}+e^{x-1}=y^{\frac{1}{2}}+1$, pa je $e^{y\ln x}(y'\ln x+\frac{y}{x})+e^{x-1}=\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y'$, pa je $y'|_{(1,1)}=2(1+1)=4$.

7. (3 boda) Funkciju $f(x)=\ln(1+x)$ napišite u obliku $f(x)=T_4(x)+R_4(x)$, gdje je T_4 četvrti Taylorov polinom u razvoju funkcije f oko točke $c=0$, a $R_4(x)$ ostatak u Lagrangeovom obliku.

Rješenje: $f(x)=\ln(1+x)$, $f'(x)=(1+x)^{-1}$, $f''(x)=-(1+x)^{-2}$, $f^{(3)}(x)=2(1+x)^{-3}$, $f^{(4)}(x)=-6(1+x)^{-4}$, $f^{(5)}(x)=24(1+x)^{-5}$, pa je $T_4(x)=0+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$, a $R_4(x)=\frac{x^5}{5}\frac{1}{(1+\xi)^5}$, gdje je $\xi\in\langle 0,x\rangle$ ili $\xi\in\langle x,0\rangle$.

8. (3 boda) Nađite desnu kosu asimptotu krivulje $y=x\operatorname{arctg}(2x)$.

Rješenje: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg}(2x)=\frac{\pi}{2}=k$. $\lim\limits_{x\to\infty}y-kx=\lim\limits_{x\to\infty}x(\operatorname{arctg}(2x)-\frac{\pi}{2})=[\infty\cdot 0]\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{1+4x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=-\frac{1}{2}$. Stoga je desna kosa asimptota pravac $y=\frac{\pi}{2}x-\frac{1}{2}$.