Rješenja prvog međuispita iz Matematike 1

održanog 12. listopada 2007.

1. (2 boda) Naći tablicu istinitosti za formule:
   a) $(x \vee y) \Rightarrow y$,
   b) $(x \wedge (x \Rightarrow y)) \Rightarrow y$.

Rješenje:

a) $(x \vee y) \Rightarrow y$:

x	y	$x \vee y$	$(x \vee y) \Rightarrow y$
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	1
0	0	0	1

b) $(x \wedge (x \Rightarrow y)) \Rightarrow y$:

x	y	$x \Rightarrow y$	$x \wedge (x \Rightarrow y)$	$(x \wedge (x \Rightarrow y)) \Rightarrow y$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

2. (2 boda) Naći sve $z \in \mathbb{C}$ koji zadovoljavaju

$$z^4 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^5 - i$$

i za koje vrijedi $\operatorname{Re} z > 0$ i $\operatorname{Im} z < 0$.

Rješenje:

$$\begin{aligned}
z^4 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)^5 - i = \left(e^{-\frac{1}{6}\pi i}\right)^5 - i = e^{-\frac{5}{6}\pi i} - i \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i - i = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i = \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
&= \sqrt{3}e^{\frac{4}{3}\pi i} \\
z_k &= \sqrt[8]{3}e^{\frac{2+3k}{6}\pi i}
\end{aligned}$$

Tražimo z_k koji zadovoljava uvjete $\operatorname{Re} z > 0$ i $\operatorname{Im} z < 0$. To je

$$z_3 = \sqrt[8]{3}e^{\frac{11}{6}\pi i} = \sqrt[8]{3}e^{-\frac{1}{6}\pi i} = \sqrt[8]{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right).$$

3. (2 boda) S pomoću matematičke indukcije izračunati $\mathbf{A}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ako je:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}^2 &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}^3 &= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Iz viđenog se može pretpostaviti da je opći oblik od

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 2^n - 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dokažimo to. Bazu već imamo. Pretpostavimo da je $\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ 2^k - 1 & 1 \end{bmatrix}$. Izračunajmo $\mathbf{A}^{k+1}$:

$$\mathbf{A}^{k+1} = A^k A = \begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ 2^k - 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{k+1} & 0 \\ 2^{k+1} - 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matematičkom indukcijom zaključujemo da je naša pretpostavljena formula točna.

4. (2 boda) Naći matricu $\mathbf{X}$ za koju vrijedi

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}\mathbf{A},$$

ako je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Rješenje: Vrijedi da je $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}\mathbf{A}$, no ako to preformuliramo (pomnožimo s matricom $\mathbf{A}$ s jedne i $\mathbf{B}$ s druge strane), dobijemo:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B} = (\mathbf{A}\mathbf{B})^2,$$

pa računamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} = (\mathbf{A}\mathbf{B})^2 &= \left(\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right)^2 \\ &= \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 156 & 128 \\ 112 & 92 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

5. (2 boda) Izračunati determinantu:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 4 \cdot 1 = 4.
\end{aligned}$$

6. (2 boda) Izračunati s pomoću elementarnih transformacija (Gaussovim algoritmom) matricu $\mathbf{A}^{-1}$ ako je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
&\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
&\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \\
&\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \\
&\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].
\end{aligned}$$

7. (2 boda) Po Cramerovom pravilu naći vrijednost nepoznanice z u sustavu:

$$\begin{cases} 2x & + & 3y & - & 2z & = & 3 \\ x & + & 4y & + & 2z & = & 5 \\ 3x & + & 7y & - & 4z & = & 0, \end{cases}$$

a zatim naći bilo kojim načinom x i y.

Rješenje: Računamo determinante za Cramerovo pravilo:

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -40$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & -4 \end{vmatrix} = -20$$

Dakle, po Cramerovom pravilu je $z = \frac{D_z}{D} = 2$. Uvrstimo sada z u sustav i dobijemo $2x + 3y = 7$ i $x + 4y = 1$, pa dobivamo da je $y = -1$ i $x = 5$.

8. (3 boda) U ovisnosti o realnom parametru λ riješiti sustav:

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & (\lambda+1)y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & (4\lambda+1)z & = & 2 \end{cases}$$

Rješenje:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda+1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4\lambda+1 & 2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4\lambda & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4\lambda & 2 \\ 0 & \lambda & 1 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1-4\lambda & -2 \\ 0 & 1 & 4\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-4\lambda^2 & 1-2\lambda \end{array}\right].$$

Ako je $\lambda = -\frac{1}{2}$, tada ovaj sustav nema rješenja. Ako je $\lambda = \frac{1}{2}$, tada sustav ima beskonačno mnogo rješenja, i ona su dana formulama $z = t$, $y = 2 - 2t$, $x = t - 2$. U svim ostalim slučajevima možemo dijeliti zadnji red sa $1 - 4\lambda^2$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1-4\lambda & -2 \\ 0 & 1 & 4\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1+2\lambda} \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 + \frac{4\lambda-1}{1+2\lambda} \\ 0 & 1 & 0 & 2 - \frac{4\lambda}{1+2\lambda} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1+2\lambda} \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-3}{1+2\lambda} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{1+2\lambda} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1+2\lambda} \end{array}\right].$$

9. (3 boda)
a) Definirati svojstvene/vlastite vrijednosti i svojstvene/vlastite vektore matrice $\mathbf{A}$.
b) Naći svojstvene/vlastite vrijednosti i svojstvene/vlastite vektore za matricu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Rješenje:

a) Broj $\lambda \in \mathbb{R}$ je svojstvena/vlastita vrijednost matrice $\mathbf{A}$ ako postoji vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ takav da je $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$. Svaki takav vektor zovemo svojstveni/vlastiti vektor matrice $\mathbf{A}$.

b) Računamo svojstvene/vlastite vrijednosti:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0,$$

što znači da su svojstvene/vlastite vrjiednosti $\lambda_{1,2} = 4, 2$. Svojstvene/vlastite vektore računamo po gornjoj formuli, tj.

$$\begin{cases} x - 3y = 4x \\ x + 5y = 4y \end{cases} \text{ i } \begin{cases} x - 3y = 2x \\ x + 5y = 2y \end{cases}$$

Iz prvog sustava dobivamo jednakost $x = -y$, pa zaključujemo da je jedan svojstveni/vlastiti vektor od $\mathbf{A}$ za $\lambda = 4$ jednak $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Iz drugog sustava dobivamo $x = -3y$, pa ispada da je za $\lambda = 2$ svojstveni/vlastiti vektor $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.