1. međuispit iz Matematike 1

15. listopada 2008.

1. (2 boda)

   a) (1 bod) Napisati definicijsku formulu za binomni koeficijent $\binom{n}{k}$.

   b) (1 bod) Napisati binomnu formulu (binomni poučak).

Rješenje:

a) $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1}{k!)}$ i $\binom{n}{0} = 1$; alternativno: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

b) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

2. (2 boda) Naći sve $z \in \mathbb{C}$ koji zadovoljavaju oba uvjeta:

$$|z+2+i| = 1, \quad |z+2-i| = 3.$$

Rješenje:

$$|(x+2)+(y+1)i| = 1$$
$$|(x+2)+(y-1)i| = 3$$
$$(x+2)^2+(y+1)^2 = 1 \Rightarrow (x+2)^2 = 1-(y+1)^2$$
$$(x+2)^2+(y-1)^2 = 3^2 \Rightarrow (x+2)^2 = 9-(y+1)^2$$
$$\Rightarrow 1-(y+1)^2 = 9-(y-1)^2$$
$$1-y^2-2y-1 = 0-y^2+2y-1$$
$$4y+8 = 0 \Rightarrow y = -2$$
$$(x+2)^2 = 1-(-2+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -2$$
$$z = -2-2i$$

3. (3 boda) Skicirati grafove funkcija:

   a) (1 bod) $f(x) = \sin(x+\frac{\pi}{2}) - 2\cos x$,

   b) (1 bod) $g(x) = e^x + e^{-x}$,

   c) (1 bod) $h(x) = |\ln x|$.

Napomena: Napisati koordinate sjecišta s koordinatnim osima, te minimuma i maksimuma (ako postoje).

Rješenje:

a) $f(x) = \sin(x+\frac{\pi}{2}) - 2\cos x = \cos x - 2\cos x = -\cos x$,

b) $g(x) = e^x + e^{-x} = 2\operatorname{ch} x$,

c) $h(x) = |\ln x|$

4. (4 boda)

a) (1 bod) Dokazati: ako determinanta ima dva ista retka, tada je ona jednaka nuli.

b) (1 bod) Koristeći tvrdnju pod a), dokazati: ako nekom retku determinante dodamo neki drugi redak pomnožen skalarom, onda se vrijednost determinante neće promijeniti.

c) (2 boda) Izračunati:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}.$$

Rješenje:

a) Očito je $\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0$. To je baza indukcije. Za korak indukcije pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve determinante reda n. Neka determinanta reda $n+1$ ima i-ti i j-ti jendak redak, $i \neq j$. Tada razvojem po k-tom retku (različitom od i i j) dobivamo $n+1$ determinantu n-tog retka, svaku sa parom jednakih redaka, pa su sve te determinante jednake nuli, pa je i determinanta reda $n+1$ jednaka nuli.

b) $\begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_i \\ \vdots \\ \vec{a}_j + \lambda\vec{a}_i \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_i \\ \vdots \\ \vec{a}_j \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_i \\ \vdots \\ \vec{a}_i \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_i \\ \vdots \\ \vec{a}_j \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix}.$

c)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Od svakog retka,} \\ \text{osim prvog} \\ \text{oduzeti prvi} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{Prvom retku} \\ \text{dodati zbroj} \\ \text{ostalih redaka} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

5. (2 boda) Neka su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ kvadratne matrice takve da je $\mathbf{AB} + \mathbf{A} = \mathbf{I}$.
   a) (1 bod) Dokazati da je $\mathbf{A}$ regularna.
   b) (1 bod) Izračunati $\mathbf{A}^{-1}$ ako je $\mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathscr{M}_3$ zadana općim elementom $b_{ij} = i + j$.

Rješenje:

a) $\mathbf{I} = \mathbf{AB} + \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{I})$, pa je $\mathbf{A}$ regularna i $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B} + \mathbf{I}$.

b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

1. način: $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B} + \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$

2. način: $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{I}) = I$ povlači $\mathbf{A} = (\mathbf{B} + \mathbf{I})^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}^{-1}$, pa je $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

6. (2 boda) Izračunati inverz matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje:

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] = [\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1}],$$

pa je $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$

7. (3 boda) Riješiti sustav jednadžbi u ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x - 2y + (1-2\lambda)z = 2 \\ x - \ \ y + \ \ (1-\lambda)z = 1 \\ \qquad \lambda y + \qquad \quad 9z = 3 \end{cases}$$

Rješenje:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1-2\lambda & | & 2 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & | & 1 \\ 0 & \lambda & 9 & | & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1-2\lambda & | & 2 \\ 0 & 1 & \lambda & | & -1 \\ 0 & \lambda & 9 & | & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & \lambda & | & -1 \\ 0 & 0 & 9-\lambda^2 & | & 3+\lambda \end{bmatrix}$$

Za $\lambda = 3$ nema rješenja.
Za $\lambda = -3$, $z = -\alpha$, $y = -1 - \lambda\alpha = -1 + 3\alpha$, $x = -\alpha$.
Za $\lambda \neq \pm 3$, $z = \frac{1}{3-\lambda}$. $y = -1 - \frac{\lambda}{3-\lambda} = \frac{-3}{3-\lambda}$, $x = \frac{-1}{3-\lambda}$.

8. (2 boda) Naći svojstvene/vlastite vrijednosti matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ -7 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Naći i svojstvene/vlastite vektore koji odgovaraju najvećoj svojstvenoj vrijednosti.

Rješenje:

$$\begin{vmatrix} \lambda+4 & -4 & 0 \\ 6 & \lambda-6 & 0 \\ 7 & -4 & \lambda-3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda+4 & -4 \\ 6 & \lambda-6 \end{vmatrix} (\lambda-3) = (\lambda-3)(\lambda^2-2\lambda) = \lambda(\lambda-2)(\lambda-3).$$

Svojstvene vrijednosti su $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ i $\lambda_3 = 3$.

$\lambda_3 = 3$, pa je $\begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ -7 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, pa je $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.