

Rješenja Završnog ispita iz Matematike 1

27.1.2012.

1. Sustav rješavamo metodom Gaussovih eliminacija:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & a+4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -a & -2 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & a+4 & 3 \\ 1 & -a & -2 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a+2 \end{array} \right]$$

1) Za $a = 2$ sustav nema rješenja jer je treći redak $[0 \ 0 \ 0 \ | \ 4]$ nemoguće zadovoljiti.

2) Za $a = -2$ dobijemo matricu iz koje izlazi parametarsko rješenje:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3) Za $a \neq \pm 2$ sustav je regularan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & \frac{a^2-4}{a^2-4} & \frac{a+2}{a^2-4} \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a-2} \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{a-4}{a-2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{a-2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a-2} \end{array} \right]$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a-4}{a-2} \\ \frac{-2}{a-2} \\ \frac{1}{a-2} \end{bmatrix}$$

2. (a) Tražimo inverz funkcije kosinus hiperbolički na odgovarajućoj domeni:

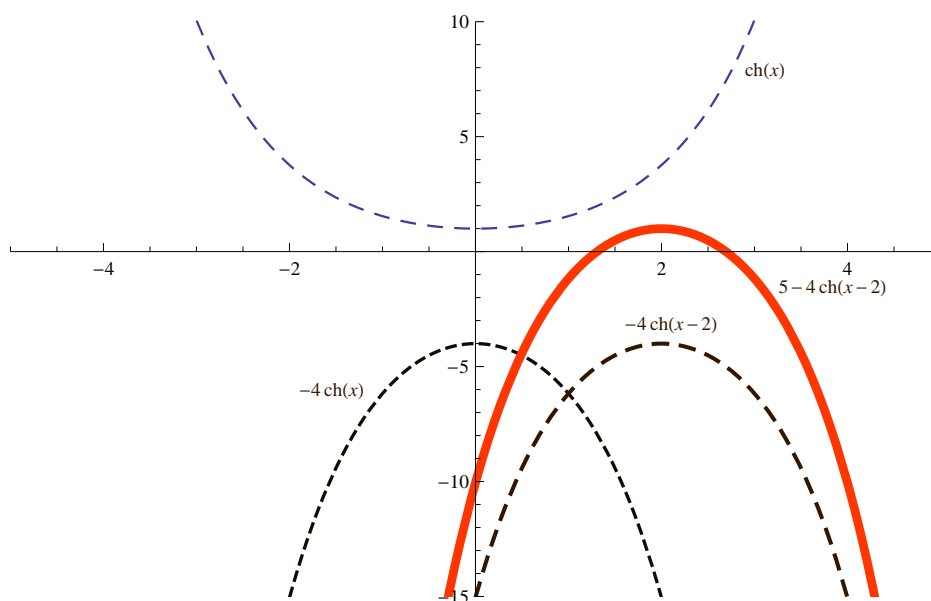
$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = y \\ e^x - 2y + e^{-x} &= 0 \quad / \cdot e^x \Rightarrow (e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0 \\ e^x &= \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1} \end{aligned}$$

Jer je $y - \sqrt{y^2 - 1} \leq 1$ za $y \geq 1$, ima smisla jedino

$$\operatorname{arch}(y) = x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}).$$

(b) Računamo nultočke of f :

$$5 - 4 \operatorname{ch}(x - 2) = 0 \Rightarrow x - 2 = \pm \operatorname{arch}\left(\frac{5}{4}\right) \Rightarrow x = 2 \pm \ln 2.$$



3. Očito je domena od f jednaka \mathbb{R} . Računamo samo kose/horizontalne asimptote:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{\sqrt{x^2 + 2}} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

$$l = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{\pm\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}} = \frac{1}{\pm 1} = \pm 1.$$

Lijeva horizontalna asimptota je pravac $y = -1$, a desna $y = 1$.

Tražimo lokalne ekstreme:

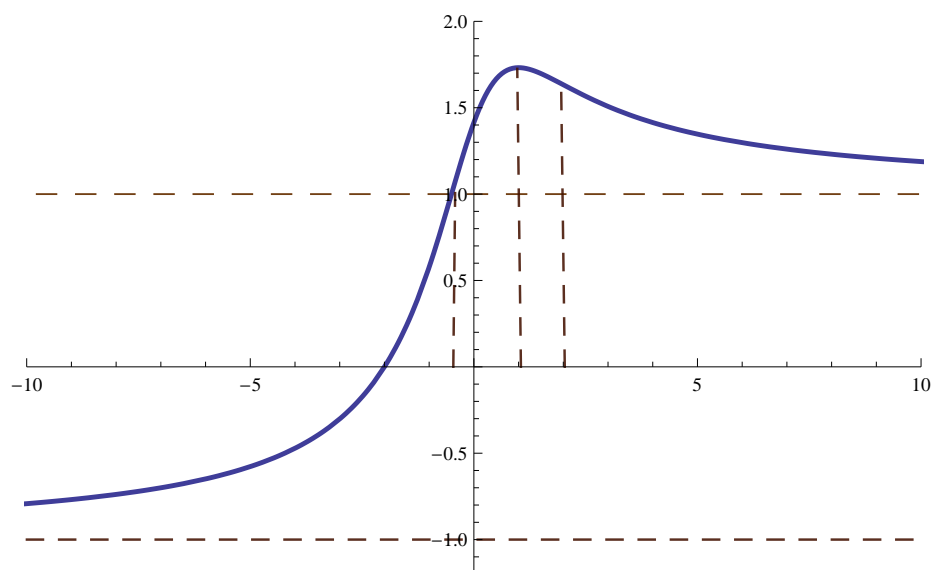
$$0 = f'(x) = -\frac{2(x-1)}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow x = 1.$$

Zbog npr. $f'(0) > 0$ i $f'(2) < 0$, točka $(1, \sqrt{3})$ je lokalni maksimum, funkcija f raste na $\langle -\infty, 1 \rangle$ i pada na $\langle 1, \infty \rangle$.

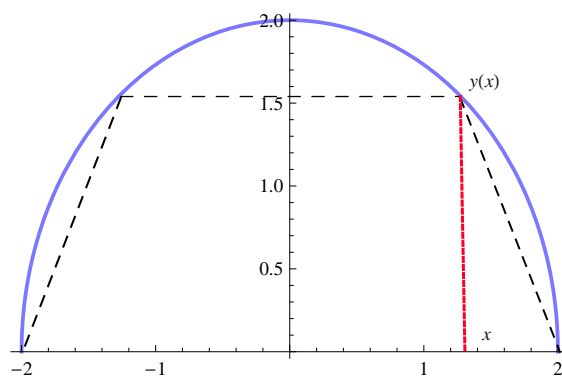
Tražimo točke infleksije:

$$0 = f''(x) = \frac{4x^2 - 6x - 4}{(x^2 + 2)^{\frac{5}{2}}} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}, 2.$$

Točke infleksije su $(-\frac{1}{2}, 1)$ i $(2, \frac{2\sqrt{6}}{3})$. Funkcija f je konveksna na intervalu $\langle -\infty, -\frac{1}{2} \rangle \cup \langle 2, \infty \rangle$ i konkavna na intervalu $\langle -\frac{1}{2}, 2 \rangle$.



4. Uočimo $y = \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 2^2$, pa je zadana krivulja gornja polovica kružnice oko ishodišta radijusa 2.



Za zadani $x \in \langle 0, 2 \rangle$, površina trapeza s traženim uvjetima dana je formulom $P(x) = (2 + x)\sqrt{4 - x^2}$ (produkt srednjice i visine). Tražimo ekstreme funkcije P :

$$0 = P'(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 4}{\sqrt{4 - x^2}} \Rightarrow x = 1.$$

Jer je $P''(1) < 0$, površina postiže maksimum za $x = 1$, stoga traženi trapez maksimalne površine ima vrhove: $(2, 0)$, $(1, \sqrt{3})$, $(-1, \sqrt{3})$ i $(-2, 0)$. Površina mu je $3\sqrt{3}$.

5. (a) Neka je zadana funkcija $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, koja u nekoj odabranoj točki $c \in I$ ima sve derivacije do reda $n + 1$. Onda funkciju f možemo prikazati u obliku

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k + R_n(x).$$

Ostatak se može napisati u tzv. Lagrangeovom obliku:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_1)}{(n+1)!} (x - c)^{n+1},$$

pri čemu je x_1 neka nepoznata točka koja se nalazi između točaka x i c , tj. $x_1 \in \langle c, x \rangle$ ili $x_1 \in \langle x, c \rangle$.

- (b) Lako se pokaže indukcijom da je k -ta derivacija funkcije $\ln(x + 1)$ jednaka $\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(x+1)^k}$. Stoga vrijedi

$$\ln(x + 1) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(x_1+1)^{n+1}}.$$

- (c) Želimo da desni član u gornjoj jednakosti bude po apsolutnoj vrijednosti manji od 10^{-2} , uz uvjet $|x| < \frac{1}{2}$ i $|x_1 + 1| > \frac{1}{2}$. Vrijedi:

$$\left| \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(x_1+1)^{n+1}} \right| \leq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}} = \frac{1}{n+1} \leq 10^{-2}.$$

Vidimo da je dovoljan uvjet $n \geq 99$.

Napomena: Aproksimacija je u ovom slučaju dovoljno dobra i za puno manji stupanj Taylorovog polinoma kojim aproksimiramo funkciju $\ln(x + 1)$ na zadanom intervalu. Ocjena pogreške koju u ovom slučaju možemo dobiti koristeći ostatak u Lagrangeovom obliku je "gruba".

6. (a)

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int f'(x)g(x)dx &\stackrel{(a)}{=} \int (fg)'(x)dx - \int f(x)g'(x)dx \\ &= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\int \ln^2 x dx &= \left[\begin{array}{l} u = \ln^2 x \quad dv = dx \\ du = \frac{2 \ln x}{x} \quad v = x \end{array} \right] = x \ln^2 x - 2 \int \ln x dx \\ &= \left[\begin{array}{l} u = \ln x \quad dv = dx \\ du = \frac{1}{x} \quad v = x \end{array} \right] = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

7. (a)

$$\begin{aligned}F(x+h) - F(x) &= \int_x^{x+h} f(t)dt = h \cdot f(x_1) \\ &\text{(za } x_1 \text{ između } x \text{ i } x+h, \text{ teorem srednje vrijednosti,)} \\ F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_1) = f(x).\end{aligned}$$

(b) Iz (a) dijela znamo da je $\int_a^x f(t)dt$ primitivna funkcija od f . Svaka druga primitivna funkcija od f je oblika $F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$, $C \in \mathbb{R}$. Vrijedi $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$.

(c)

$$\begin{aligned}G(x) &= \int_a^{x+1} \sqrt{t}e^{-t}dt - \int_a^x \sqrt{t}e^{-t}dt \\ \stackrel{(a)}{\Rightarrow} 0 = G'(x) &= \sqrt{x+1}e^{-x-1} - \sqrt{x}e^{-x} \Rightarrow x = \frac{1}{e^2 - 1}.\end{aligned}$$

Napomena: Može se pokazati da funkcija G ima u točki $\frac{1}{e^2-1}$ maksimum. Primijetimo da vrijednost funkcije G u točki $x \geq 0$ predstavlja površinu lika omeđenog krivuljom $y = \sqrt{x} \cdot e^{-x}$ i dva vertikalna pravca međusobno udaljena za 1. Iz navedenoga slijedi da je ta površina maksimalna kada su ti pravci $x = \frac{1}{e^2-1}$ i $x = \frac{e^2}{e^2-1}$

8. (a) $I_0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = -\cos(\frac{\pi}{2}) + \cos(0) = 1$. Za $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \left[\begin{array}{ll} u = \sin^{n-1} x & dv = \sin x dx \\ du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx & v = -\cos x \end{array} \right] \\ &= 0 + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n) \\ &\Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \end{aligned}$$

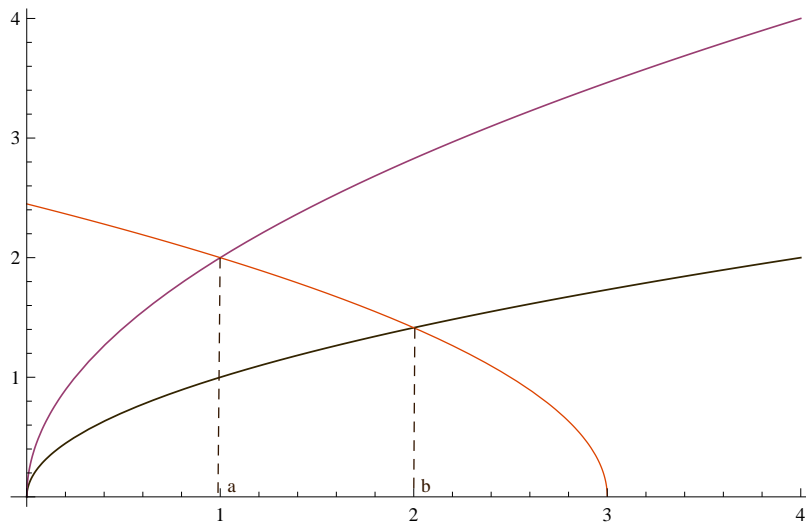
(b)

$$I_{10} = \frac{9}{10} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0 = \frac{63\pi}{512}.$$

9.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dx}{3e^{2x} + 1} &= \left[\begin{array}{l} t = e^{2x} \\ dt = 2tdx \end{array} \right] = \int_1^\infty \frac{dt}{2t(3t+1)} \\ &= \frac{1}{2} \int_1^\infty \left(\frac{1}{t} - \frac{3}{3t+1} \right) dt = \frac{1}{2} \ln \frac{t}{3t+1} \Big|_1^\infty \\ &= \frac{1}{2} \lim_{L \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{L}{3L+1} - \ln \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{3} - \ln \frac{1}{4} \right) \\ &= \ln 2 - \frac{\ln 3}{2}. \end{aligned}$$

10. Presjeci: $2\sqrt{a} = \sqrt{6-2a} \Rightarrow a = 1$, $\sqrt{b} = \sqrt{6-2b} \Rightarrow b = 2$.



$$\begin{aligned}
 P &= \int_0^1 (2\sqrt{x} - \sqrt{x})dx + \int_1^2 (\sqrt{6-2x} - \sqrt{x})dx \\
 &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_4^2 \sqrt{t}dt - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 = 4 - 2\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$