Zad 1. Nadi sve $z \in \mathbb{C}$ koji zadovoljavaju jednadbu

$$\left(z - \frac{3}{4}i\right)^3 = -i$$

Rjesenje.

$$\left(z - \frac{3}{4}i\right)^3 = -i = e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

Tada je

$$z - \frac{3}{4}i \in \sqrt[3]{-i} = \{e^{i\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}} : k = 0, 1, 2\} =$$

$$\{e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\frac{7\pi}{6}}, e^{i\frac{11\pi}{6}}\} = *$$

(Sada primjenjujemo $e^{i\phi} = cos(\phi) + isin(\phi)$)

$$* = \{i, -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\} = \{w_1, w_2, w_3\}$$

Dakle

$$z \in \{w_1 + \frac{3}{4}i, w_2 + \frac{3}{4}i, w_3 + \frac{3}{4}i\}$$

Pa imamo

$$z_1 = \frac{7}{4}i$$

$$z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4}i$$

$$z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4}i$$

Imamo $Im(z_1) = \frac{7}{4}$, $Im(z_2) = \frac{1}{4}$ i $Im(z_3) = \frac{1}{4}$ pa ni za jedno rjesenje ne vrijedi da je $Im(z) < 0$

Zad 2. Dana je funkcija $f\colon [0, \pi] \to Y$

$$f(x) = 3 + 3\cos(2x)$$

$a)$ Odredi Y tako da f bude surjekcija. $b)$ Je li za takav Y funkcija f bijekcija $c)$ Skiciraj graf funkcije f

Rjesenje. Podjimo od c) Funkcija $g(x) = cos(x)$ pada na intervalu $[0, \pi]$ od tocke $(0, 1)$ do tocke $(\pi, -1)$ zatim raste na intervalu $[\pi, 2\pi]$ do tocke $(2\pi, 1)$. Sada funkcija $h(x) = \cos(2x)$ se ponasa slicno samo se sve vrijednosti podijele s 2 dakle pada od tocke $(0, 1)$ do tocke $(\pi/2, -1)$ te tada raste do tocke $(\pi, 1)$. Sada se lako vidi da $Im(h) = [-1, 1]$ pa je $Im(3h) = [-3, 3]$ pa je i $Im(f) = Im(3 + 3h) = 3 + [-3, 3] = [0, 6]$. Funckija je surjekcija ako za Y uzmemo $Im(f) = [0, 6]$. Nije bijekcija jer naprimjer $f(0) = f(\pi)$ to jest nije injekcija.

Zad 3. Odredi prirodno podrucje defincije funkcije

$$f(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{4x-1}{x-5}\right)}$$

Rjesenje. Imamo da

$$\ln\left(\frac{4x-1}{x-5}\right) \geq 0$$

to povlaci da je

$$\frac{4x-1}{x-5} \geq 1$$

odnosno imamo

$$\frac{4x-1}{x-5} - 1 \geq 0$$

sto kada se sredi daje

$$\frac{3x+4}{x-5} \geq 0$$

iz cega se da iscitati da je rjesenje

$$\langle -\infty, -\frac{4}{3}] \cup \langle 5, +\infty \rangle$$

Zad 4. Nadji sve matrice koje komutiraju s matricom

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Rjesenje.
$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Kada se to izmonzi dobije se...

$$\begin{bmatrix} a-c & b-d \\ 2a+c & 2b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2b & -a+b \\ c+2d & -c+d \end{bmatrix}$$

Odmah vidimo iz $b-d=-a+b$ da je $a=d$, a iz $a-c=a+2b$ dobijemo $c=-2b$ dakle rjesenje je

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -2b & a \end{bmatrix}$$