

Zad 1. Nadi sve  $z \in \mathbb{C}$  koji zadovoljavaju jednadbu

$$\left(z + \frac{3}{4}i\right)^3 = i$$

Rjesenje.

$$\left(z + \frac{3}{4}i\right)^3 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Tada je

$$z + \frac{3}{4}i \in \sqrt[3]{i} = \{e^{i\frac{\pi+2k\pi}{3}} : k = 0, 1, 2\} = \\ \{e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}, e^{i\frac{9\pi}{6}}\} = *$$

(Sada primjenjujemo  $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$ )

$$* = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, -i\right\} = \{w_1, w_2, w_3\}$$

Dakle

$$z \in \left\{w_1 - \frac{3}{4}i, w_2 - \frac{3}{4}i, w_3 - \frac{3}{4}i\right\}$$

Pa imamo

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4}i \\ z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4}i \\ z_3 = -\frac{7}{4}i$$

Imamo  $Im(z_1) = -\frac{1}{4}$ ,  $Im(z_2) = -\frac{1}{4}$  i  $Im(z_3) = -\frac{7}{4}$  pa ni za jedno rjesenje ne vrijedi da je  $Im(z) > 0$

Zad 2. Dana je funkcija  $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow Y$

$$f(x) = 2 + 2\sin(2x)$$

- a) Odredi  $Y$  tako da  $f$  bude surjekcija. b) Je li za takav  $Y$  funkcija  $f$  bijekcija  
c) Skiciraj graf funkcije  $f$

Rjesenje. Podjimo od  $c$ ) Funkcija  $g(x) = \sin(x)$  pada na intervalu  $[-\pi, -\pi/2]$  od tocke  $(-\pi, 0)$  do tocke  $(-\pi/2, -1)$  zatim raste do tocke  $(\pi/2, 1)$  prolazeci kroz tocku  $(0, 0)$  te opet pada od tocke  $(\pi/2, 1)$  do tocke  $(\pi, 0)$  Sada funkcija  $h(x) = \sin(2x)$  se ponasa slicno samo se sve vrijednosti podijele s 2 dakle pada od tocke  $(-\pi/2, 0)$  do tocke  $(-\pi/4, -1)$  te tada raste do tocke  $(\pi/4, 1)$  pa opet pada do  $(\pi/2, 0)$ . Sada se lako vidi da  $Im(h) = [-1, 1]$  pa je  $Im(2h) = [-2, 2]$  pa je i  $Im(f) = Im(2 + 2h) = 2 + [-2, 2] = [0, 4]$ . Funkcija je surjektivna ako za  $Y$  uzmemo  $Im(f) = [0, 4]$ . Nije bijektivna jer naprimjer  $f(-\pi/2) = f(\pi/2)$  to jest nije injektivna.

Zad 3. Odredi prirodno podrucje definicije funkcije

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{x-2}\right)$$

Rjesenje. Domena od  $\arcsin$  je  $[-1, 1]$  tada imamo da

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x-2} \in [-1, 1]\} =$$

$$\{x \in \mathbb{R} : \left| \frac{1}{x-2} \right| \leq 1\} =$$

$$\{x \in \mathbb{R} : |x-2| \geq 1\} =$$

Opisno to su sve tocke koje su za barem 1 udaljenje od tocke 2 a to su onda

$$\langle -\infty, 1 \rangle \cup [3, +\infty)$$

Zad 4. Nadji sve matrice koje komutiraju s matricom

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Rjesenje.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Kada se to izmonzi dobije se...

$$\begin{bmatrix} a - c & b - d \\ -a + 2c & -b + 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - b & -a + 2b \\ c - d & -c + 2d \end{bmatrix}$$

Odmah vidimo iz  $a - c = a - b$  da je  $c = b$ , a iz  $b - d = -a + 2b$  dobijemo  $a - d = b$  dakle rjesenje je

$$\begin{bmatrix} a & a - d \\ a - d & d \end{bmatrix}$$