

# 1. DOMAĆA ZADAĆA IZ MATEMATIKE 1

1. (a) Dokaži da je formula  $((\neg x \Rightarrow y) \wedge \neg y) \Rightarrow x$  (dokaz iz protuslovlja) identički istinita.

(b) Napiši tablicu istinitosti za  $(x \vee y) \Rightarrow y$ .

2. Dokaži de Morganove formule za sudove (pomoću tablica istinitosti) i primjenom tih formula i svojstva distributivnosti maksimalno pojednostavni formulu algebre sudova

$$\neg(\neg A \wedge (A \vee \neg B)).$$

3. Ispitaj istinitost sudova A, B, C, D, E:

$$A \equiv (\forall x \in \mathbf{R})(\exists y \in \mathbf{R})(y > x),$$

$$B \equiv (\exists y \in \mathbf{R})(\forall x \in \mathbf{R})(y > x),$$

$$C \equiv (\forall a \in \mathbf{Z})(\forall b \in \mathbf{Z})(\exists x \in \mathbf{R})(x^2 + ax = b),$$

$$D \equiv (\forall a \in \mathbf{Z})(\exists b \in \mathbf{Z})(\exists x \in \mathbf{R})(x^2 + ax = b),$$

$$E \equiv (\exists a \in \mathbf{Z})(\forall b \in \mathbf{Z})(\exists x \in \mathbf{R})(x^2 + ax = b).$$

Obrazloži odgovore !

4. Zadan je sud  $A \equiv (\forall x_1 \in \mathbf{R})(\forall x_2 \in \mathbf{R})(|x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2)$ .

(a) Negiraj sud A. (Rezultat treba biti zapisan bez znaka negacije.)

(b) Koji je sud istinit: A ili  $\neg A$ ? Obrazloži !

5. Odredi elemente skupova

$$A = \{x \in \mathbf{N} \mid (\exists y \in \mathbf{N}) x + y = 5\},$$

$$B = \{x \in \mathbf{N} \mid (\exists y \in \mathbf{N}) 10x + 3y = 300\}.$$

6. (a) Zadani su skupovi  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{3, 4, 5, 6\}$  i  $C = \{4, 5, 6\}$ .

Postoji surjeksija  $f : A \rightarrow B$ ? Postoji li injeksija?

Postoji li injeksija  $f : B \rightarrow C$ ? Postoji li surjeksija?

Postoji li bijeksija  $f : A \rightarrow C$ ?

Obrazloži!

(b) Postoji li bijeksija  $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{N}$ ? Obrazloži !

7. Neka je  $A = \{1, 2, 3\}$ . Napiši sve bijekcije  $f : A \rightarrow A$ .

8. Za svaku od sljedećih funkcija ispitaj je li bijekcija:

a)  $f : \mathbf{R} \rightarrow \langle -\infty, 1], f(x) = 1 - x^4,$

b)  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = |x - 5| - |6 - x|.$

Obrazloži !

9. Dokaži da je kompozicija dvije bijekcije opet bijekcija.

10. Definirajmo na skupu  $S = [0, 1]$  relaciju  $R$  "biti blizak". Neka je  $\epsilon > 0$  malen broj. Za dva elementa  $x$  i  $y$  iz  $S$  kažemo da su bliski, ako vrijedi  $|x - y| < \epsilon$ . Odredi i nacrtaj u Kartezijevom sustavu sve parove bliskih brojeva. Je li ova relacija simetrična? Je li ona refleksivna? Je li ona tranzitivna?

11. Matematičkom indukcijom dokaži da je zbroj kubova prvih  $n$  prirodnih brojeva jednak  $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ .

12. Matematičkom indukcijom dokaži da je

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \cdot i^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$$

za svaki  $n \in \mathbb{N}$

13. Matematičkom indukcijom dokaži da je

$$\prod_{i=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^i}\right) = \frac{\sin x}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

za svaki  $n \in \mathbb{N}$  i svaki  $x \in \mathbb{R}$

14. Matematičkom indukcijom dokaži da je

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}} \leq 2\sqrt{n} - 1$$

za svaki  $n \in \mathbb{N}$ .

15. Matematičkom indukcijom dokaži da je zbroj kubova triju uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv s 9.

16. Nađi sve  $z$  ako je:

(a)  $z^8 = (1 + i)^4$ ,

(b)  $z^4 = \frac{1-i}{\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)}$ ,

(c)  $z^3 = (\sqrt{3} - i)^5 \cdot (1 + \sqrt{3}i)$ .

17. (a) U kompleksnoj ravnini skiciraj skup svih kompleksnih brojeva  $z$  za koje je  $\arg(z^3) = \frac{\pi}{2}$ .

(b) U kompleksnoj ravnini skiciraj skup svih kompleksnih brojeva  $z$  za koje je:  $|z + 2| = 1$ .

(c) Nađi sve  $z \in \mathbb{C}$  takve da vrijedi  $\arg(z^3) = \frac{\pi}{2}$  i  $|z + 2| = 1$ .

18. Riješi jednadžbu u skupu  $\mathbb{C}$ :  $z^6 + z^4 + z^2 + 1 = 0$ .

19. Riješi jednadžbu u skupu  $\mathbb{C}$ :  $z^8 + 2z^4 + 4 = 0$ .

20. Nađi sve  $z \in \mathbb{C}$  koji zadovoljavaju jednadžbu  $z^4 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^5 - i$  i za koje vrijedi  $\operatorname{Re}z > 0$  i  $\operatorname{Im}z < 0$ .