UDŽBENICI SVEUČILIŠTA U ZAGREBU
MANUALIA UNIVERSITATIS STUDIORUM ZAGRABIENSIS

Bojana Dalbelo Bašić, Jan Šnajder

UMJETNA INTELIGENCIJA

Zaključivanje uporabom propozicijske i predikatne logike

– zbirka zadataka –

Zagreb, 2008.

Autori:
prof. dr. sc. Bojana Dalbelo Bašić, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zagreb
mr. sc. Jan Šnajder, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zagreb

Uporabu ove skripte odobrio je Senat Sveučilišta u Zagrebu na sjednici održanoj 10. lipnja 2008. godine odlukom broj 380-02/38-08-3.

Recenzenti:
prof. dr. sc. Vlatko Čerić, Ekonomski fakultet, Sveučilište u Zagrebu
doc. dr. sc. Mladen Vuković, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu
doc. dr. sc. Siniša Šegvić, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Sveučilište u Zagrebu

Za tisak pripremio:
Jan Šnajder

Verzija 1.9 (2009-12-08)

ISBN 978-953-184-149-8

Sadržaj

Poglavlje 1

Zaključivanje uporabom propozicijske logike

Propozicijska logika[1] najjednostavniji je formalni jezik za prikaz znanja i zaključivanje u području umjetne inteligencije. Ona se temelji na jednostavnoj *ontološkoj pretpostavci* – pretpostavci o tome što postoji i što je stoga logikom opisivo – koju možemo sažeti u sljedećem: "Postoje činjenice koje mogu biti ili istinite ili lažne". Činjenice predstavljaju znanje o svijetu i oblikujemo ih izjavnim rečenicama koje smatramo elementarnim i nedjeljivim te ne zadiremo u njihovu strukturu. Takve ćemo izjave nazivati *elementarnim propozicijama*. Propozicijsku logiku, kao i svaki drugi sustav formalne logike, definiramo putem njene *sintakse*, *semantike* i *teorije dokaza* (eng. proof theory).

1.1 Sintaksa propozicijske logike

Sintaksa logike definira njen formalni jezik, odnosno nizove simbola koji sačinjavaju ispravne formule. Sintaksa propozicijske logike koristi sljedeće vrste simbola:

(i) *Elementarne propozicije* ili *atome*. Njih ćemo označavamo velikim slovima A, B, C, D, itd. Propozicije mogu poprimiti jednu od dvije vrijednosti istinitosti i zato se još nazivaju *logičke varijable*.

(ii) *Logički veznici* ili *logički operatori*. To su unarni operator negacije '$\neg$' te četiri binarna operatora: '$\wedge$' (operator *i*), '$\vee$' (operator *ili*), '$\rightarrow$' (*implikacija*) i '$\leftrightarrow$' (*ekvivalencija*).

(iii) Logičke konstante *True* i *False* koje označavaju uvijek istinitu odnosno uvijek lažnu propoziciju.

Primjeri atoma su A = "Zemlja je okrugla", B = "Harry Potter se školuje u Hogwartsu", C = "Propozicijska logika je najmoćniji jezik za prikaz znanja" i D = "Minotaur je mitsko biće". Uporabom navedenih simbola, formule propozicijske logike grade se na sljedeći način.

[1] Propozicije se nazivaju još i *sudovi* te se u skladu s time propozicijska logika još naziva i *logika sudova*.

Definicija. *Dobro oblikovana formula* (eng. well-formed formula, skraćeno *wff*) propozicijske logike definirana je rekurzivno na sljedeći način:

(i) Atom je formula.
(ii) Ako je F formula tada je i $(\neg F)$ formula;
(iii) Ako su F i G formule tada su formule: $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$, $(F \leftrightarrow G)$.
(iv) Ništa drugo nije wff.

Umjesto pojma dobro oblikovana formula koriste se još i pojmovi *rečenica* ili samo *formula*. Primjeri formula su

- C,
- $(\neg C)$,
- $((A \vee B) \wedge (\neg C))$,
- $\Big(\big((B \vee F) \wedge ((\neg B) \vee G)\big) \rightarrow (F \vee G)\Big)$.

Uočite da je svaka formula koja se gradi iz elementarnih propozicija zatvorena u zagrade. Time je osigurana nedvosmislenost sintakse jezika. Dogovorno, radi lakše čitljivosti, dopustit ćemo izostavljanje zagrada u pravilu (ii) te zagrada u pravilu (iii) ako su one vanjske zagrade formule. Prema tome, dobro oblikovane formule su i sljedeće formule:

- $\neg C$,
- $(A \vee B) \wedge \neg C$,
- $\big((B \vee F) \wedge (\neg B \vee G)\big) \rightarrow (F \vee G)$.

Ponekad se sintaksa još više pojednostavljuje uvođenjem prioriteta operatora. Redoslijed prioriteta u propozicijskoj logici uobičajeno je sljedeći (od najvišeg prema najmanjem): $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$. Uz takav dogovor, formulu $(A \vee ((\neg B) \wedge C)) \rightarrow D$ mogli bismo kraće pisati kao pisati $A \vee \neg B \wedge C \rightarrow D$. Mi u nastavku ipak nećemo koristiti prioritete operatora.

1.2 Semantika propozicijske logike

Sa stajališta sintakse, formula nije ništa više nego niz simbola bez ikakvog značenja pridijeljenog pojedinim elementima. Semantika propozicijske logike definira značenje formule, odnosno definira kada je neka formula istinita ili lažna. Pridjeljivanje značenja formuli naziva se *interpretacija* formule.

Definicija. Neka je F dobro oblikovana formula propozicijske logike te neka su $E_1, E_2, \ldots, E_n$ elementarne propozicije koji se u njoj pojavljuju. *Interpretacija* formule F jest pridjeljivanje vrijednosti istinitosti iz skupa elementarnim propozicijama $E_1, E_2, \ldots, E_n$, i to svakom E_i vrijednost $\top$ (istinito) ili vrijednost $\perp$ (lažno), ali ne i oboje.

Valja primijetiti da formula koja ima n atoma ima 2^n različitih interpretacija.

Definicija. Kažemo da je formula F *istinita u interpretaciji* (ili *istinita za interpretaciju*) ako i samo ako se F u toj interpretaciji vrednuje istinito. Interpretacija *zadovoljava* formulu ako je formula istinita za tu interpretaciju.

Neka su F i G dobro oblikovane formule. Vrednovanje formula $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$ i $(F \leftrightarrow G)$ provodi se rekurzivno na temelju vrijednosti istinitosti podformula F i G sukladno sljedećim *tablicama istinitosti*:

F	$\neg F$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

F	G	$F \wedge G$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

F	G	$F \vee G$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

F	G	$F \rightarrow G$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$

F	G	$F \leftrightarrow G$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

1.1. Odredite vrijednost istinitosti formule $((A \vee B) \wedge C) \rightarrow (\neg B \vee C)$ uz interpretaciju $t(A) = \bot$, $t(B) = \top$ i $t(C) = \top$.

■ ***Rješenje:***

Vrednujmo najprije lijevu stranu implikacije (*antecedens*). U danoj interpretaciji, sukladno tablici istinitosti za operator '$\vee$', podformula $(A \vee B)$ vrednuje se istinito. Kako je u danoj interpretaciji propozicija C istinita, to je, sukladno tablici istinitosti za operator '$\wedge$', istinita i formula $((A \vee B) \wedge C)$. Lako je provjeriti da je u danoj interpretaciji i desna strana implikacije (*konzekvens*) istinita. Konačno, sukladno tablici istinitosti za operator '$\rightarrow$', zaključujemo da interpretacija zadovoljava formulu. □

Definicija. Formula je *valjana* (*tautologija*; eng. tautology, valid) ako i samo ako je istinita za svaku svoju interpretaciju.

Definicija. Formula je *nekonzistentna* (*kontradikcija*, *nezadovoljiva*, *proturječna*, *antitautologija*; eng. contradiction, inconsistent, unsatisfiable) ako i samo ako je lažna za svaku svoju interpretaciju. Formula je *konzistentna* (*zadovoljiva*, *ispunjiva*; eng. consistent, satisfiable) ako i samo ako nije nekonzistentna.

Primjer tautologije jest formula $(F \vee \neg F)$, a primjer proturječja formula $(F \wedge \neg F)$. Vrijedi da je formula tautologija ako i samo ako je njezina negacija proturječje.

Na temelju gornjih definicija možemo izreći sljedeće tvrdnje:

- Formula je konzistentna ako je istinita barem za jednu svoju interpretaciju;
- Ako je formula tautologija, onda je i konzistentna, ali ne vrijedi obrat;
- Ako formula nije tautologija, onda ne znači da je kontradikcija;
- Ako formula nije kontradikcija, onda je po definiciji konzistentna, ali ne mora biti tautologija.

Definicija. Formula F je *ekvivalentna* formuli G ako i samo ako je vrijednost istinitosti od F jednaka vrijednosti istinitosti od G za svaku moguću interpretaciju formula F i G.

Ekvivalentnost formula F i G označava se sa '$F \equiv G$'. Valja primijetiti da '$F \equiv G$' nije formula propozicijske logike ('$\equiv$' je metasimbol koji nije dio sintakse propozicijske logike).

Središnji semantički koncept logike jest *logička posljedica*, koji nam omogućava da odredimo slijedi li neka tvrdnja iz drugih tvrdnji.

Definicija. Formula G je *logička posljedica* (*semantička posljedica*; eng. logical consequence, semantic consequence) formula $F_1, \ldots, F_n$ ako i samo ako svaka interpretacija koja zadovoljava formulu $F_1 \wedge \cdots \wedge F_n$ također zadovoljava i formulu G.

Da je G logička posljedica od $F_1, \ldots, F_n$ zapisujemo kao '$F_1, F_2, \ldots, F_n \vDash G$' i čitamo $F_1, \ldots, F_n$ logički (semantički) povlači (eng. logically entails, semantically entails) G. Formule $F_1, \ldots, F_n$ nazivaju se *premise*, G se naziva *ciljna formula*.

Primjer. Formula A je logička posljedica formule $A \wedge B$, tj. $A \wedge B \vDash A$ zato što za svaku interpretaciju za koju je $A \wedge B$ istinito, vrijedi i da je A istinito. Vrijedi li $A \vee B \vDash A$?

1.2. Metodom po izboru dokažite:

$$B,\ \neg C,\ (\neg A \wedge B) \to C\ \vDash\ \neg A.$$

■ ***Rješenje:***

Relaciju logičke posljedice '$\vDash$' u propozicijskoj logici možemo dokazati (i) prema definiciji, (ii) izravnom metodom ili (iii) metodom opovrgavanja.

Dokaz po definiciji sastoji se u tome da se putem *tablice istinitosti* pronađu sve one interpretacije u kojima su sve premise istinite te da se provjeri je li u tim interpretacijama istinita i ciljna formula. Ako je to slučaj, ciljna formula jest logička posljedica navedenih premisa (po definiciji), inače nije. Primijetite da je u općenitom slučaju lakše provjeriti da neka formula *nije* logička posljedica zadanih premisa, nego da ona to *jest*: da bismo dokazali prvo, dovoljno je pronaći samo jednu interpretaciju koja ne zadovoljava definiciju logičke posljedice, dok da bismo dokazali drugo, potrebno ih je sve provjeriti.[2]

Kada dokazujemo izravnom metodom, nastojimo pokazati da vrijedi:

$$\vDash (F_1 \wedge \cdots \wedge F_n) \to G,$$

tj. nastojimo pokazati da je formula '$F_1 \wedge \cdots \wedge F_n \to G$' valjana (tautologija). Ako je ova formula valjana, onda je G logička posljedica formula $F_1, \ldots, F_n$. To je zato što je logička posljedica zapravo definirana implikacijom: G je logička posljedica formula $F_1, \ldots, F_n$ ako i samo ako vrijedi "*ako* je formula $F_1, \ldots, F_n$ istinita, *onda* je G istinita".

[2]To može biti problematično jer broj interpretacija raste eksponencijalno s brojem propozicijskih varijabli.

Kada dokazujemo metodom opovrgavanja, nastojimo pokazati da:

$$\vDash \neg\big(F_1 \land \cdots \land F_n \land \neg G\big),$$

tj. nastojimo pokazati da je formula '$F_1 \land \cdots \land F_n \land \neg G$' proturječna (nekonzistentna, kontradikcija, antitautologija). Naime, ta je formula negacija prethodne formule u kojoj smo koristili implikaciju, pa ako je ona proturječna, onda je njena negacija valjana, pa je G logička posljedica formula $F_1 \land \cdots \land F_n$. Također možemo reći da nastojimo pokazati kako nije moguće da "sve premise budu istinite, a da G nije istinit".

Valja primijetiti da je '$\vDash$' semantička relacija, stoga je u sva tri slučaja dokaz potrebno raditi preko tablica istinitosti koje izravno definiraju semantiku propozicijske logike.

Dokažimo zadanu relaciju korištenjem izravne metode. Potrebno je, dakle, dokazati:

$$\vDash \Big(B \land \neg C \land \big((\neg A \land B) \to C\big)\Big) \to \neg A,$$

tj. da je navedena formula tautologija. Konstruiramo odgovarajuću tablicu istinitosti:

A	B	C	$\neg A$	$\neg C$	$\overbrace{B \land \neg C}^{[1]}$	$\overbrace{\neg A \land B}^{[2]}$	$\overbrace{[2] \to C}^{[3]}$	$\overbrace{[1] \land [3]}^{[4]}$	$[4] \to \neg A$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$

U gornjoj tablici koristili smo svojstvo asocijativnosti operatora '$\land$' (temeljem ekvivalencije $(F \land G) \land H \equiv F \land (G \land H)$) te smo tako pojedine sastavnice konjunkcije u antecedensu vrednovali proizvoljnim redoslijedom. Obzirom da formula nije tautologija (neistinita je za drugu interpretaciju u tablici), zaključujemo da $\neg A$ nije logička posljedica navedenih premisa, tj.: $B,\ \neg C,\ (\neg A \land B) \to C \nvDash \neg A$. □

1.3. Metodom po izboru dokažite:

(a) $P \lor Q,\ \neg P,\ \neg Q \vDash R$

(b) $A \to (B \to C),\ B,\ \neg C \vDash \neg A$

(c) $\neg R,\ (P \to Q) \land (Q \to R) \vDash \neg P \lor S.$

(d) $\neg R,\ P \to Q,\ Q \to R \nvDash P \lor W$

(e) $P \to (Q \to \neg R),\ R \vDash \neg P \lor \neg Q$

1.4. Dokažite da vrijedi: $P, \neg P \models Q$.

■ ***Rješenje:***

Premise P i $\neg P$ međusobno su isključive (zakon isključenja trećega), tj. ne postoji interpretacija u kojoj su premise P i $\neg P$ obje istinite. To ujedno znači da nužno vrijedi tvrdnja "*ako* su premise istinite, *onda* je istinita ciljna formula" (antecedens ove implikacije je lažan, stoga je cijela implikacija istinita), iz čega po definiciji logičke posljedice slijedi da je formula Q logička posljedica navedenih premisa. Formalno:

P	Q	$\neg P$	Q
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$

Uočavamo da u tablici ne postoji redak u kojemu su obje premise istinite, pa dakle nije moguće pronaći niti jedan protuprimjer (interpretaciju u kojoj su premise istinite a logička posljedica to nije) i na taj način oboriti tvrdnju da Q jest logička posljedica navedenih premisa.

Općenito, kad god su premise proturječne, iz njih logički slijedi bilo koja formula. Međutim, tako izvedena logička posljedica ne donosi nikakvu novu spoznaju (tj. ona je *epistemološki* bezvrijedna).[3] Zbog toga u praksi pretpostavljamo da su premise konzistentne (da nisu proturječne). □

U propozicijskoj logici može se postupkom koji se sastoji od konačnog broja koraka odlučiti je li zadana formula valjana (tautologija) ili nije. Zato se kaže da je propozicijska logika *odlučiva* (eng. decidable).

S druge strane, problem kod dokazivanja logičke posljedice u propozicijskoj logici jest da broj koraka u postupku raste eksponencijalno s brojem elementarnih propozicija. Stoga je takav način dokazivanja neprikladan za primjenu na računalu.

1.3 Teorija dokaza

Logičku posljedicu ljudi tipično ne dokazuju na način da pokušaju pronaći interpretaciju u kojoj bi premise bile istinite, a ciljna formula neistinita. Umjesto toga, ljudi pokušavaju pokazati kako se ciljna formula može *izvesti* iz premisa u konačnom broju koraka zaključivanja, svaki od kojih podupire ciljnu formulu. Alternativni postupak dokazivanja logičke posljedice jest uporaba *pravila zaključivanja* za dedukciju posljedica iz zadanih premisa. Pravila zaključivanja omogućuju dobivanje novih izjava na temelju zadanih premisa, bez eksplicitnog referenciranja na semantiku logike, odnosno istinosne vrijednosti propozicija. Neka pravila tzv. *prirodnog zaključivanja* dana su u dodatku C.

[3] *Epistemologija* ili *spoznajna teorija* je filozofska disciplina o uvjetima, izvorima i granicama spoznaje.

Definicija. Formula G je *dedukcija* (eng. deduction) ili *deduktivna posljedica* (eng. deductive consequence) formula $F_1, F2, \ldots, F_n$ ako i samo ako je G moguće izvesti (eng. derive) iz premisa $F_1, F_2, \ldots, F_n$ pravilima zaključivanja.

Još možemo reći da G *deduktivno slijedi* (eng. deductively follows) iz $F_1, \ldots, F_n$, a također i da $F_1, \ldots, Fn$ *izvodi* (eng. derives) ili *deduktivno povlači* (eng. deductively entails) G. Da je G dedukcija ili deduktivna posljedica premisa $F1, F2, \ldots, Fn$ zapisujemo kao '$F_1, F_2, \ldots, F_n \vdash G$'.

Poseban slučaj predstavljaju dedukcije koje se mogu izvesti pravilima bez ikakvih premisa, tj. mogu se izvesti iz praznog skupa premisa. Takve dedukcije nazivamo *teoremima*.

Definicija. Formula G je *teorem* ako i samo ako vrijedi $\vdash G$.

1.5. Metodom po izboru dokažite:

$$C \to B,\ (B \leftrightarrow E) \land C,\ D \to \neg E \ \vdash\ \neg(D \land A).$$

Relaciju *deduktivne posljedice* '$\vdash$' dokazujemo uporabom pravila zaključivanja. Promotrimo dokaz *rezolucijom opovrgavanjem*. Premise i negaciju cilja najprije pretvaramo u klauzalni oblik:

$$\begin{aligned}
&C \to B \ \equiv\ \neg C \lor B,\\
&(B \leftrightarrow E) \land C \ \equiv\ (B \to E) \land (E \to B) \land C \ \equiv\ (\neg B \lor E) \land (\neg E \lor B) \land C,\\
&D \to \neg E \ \equiv\ \neg D \lor \neg E,\\
&\neg\neg(D \land A) \ \equiv\ D \land A.
\end{aligned}$$

Kako se druga premisa sastoji od tri klauzule, a zaključak od dvije, u rezolucijski postupak ukupno ulazi sedam klauzula, i on se provodi kako slijedi:

(1)	$\neg C \lor B$	
(2)	$\neg B \lor E$	
(3)	$\neg E \lor B$	
(4)	C	
(5)	$\neg D \lor \neg E$	
(6)	D	
(7)	A	
(8)	$\neg E$	(iz 5 i 6)
(9)	$\neg B$	(iz 2 i 8)
(10)	$\neg C$	(iz 1 i 9)
(11)	nil	(iz 4 i 10)

Valja naglasiti da dokaz nije moguć izravnim rezolucijskim postupkom jer ona nije potpuna te na ovom primjeru ne uspijeva. Alternativno, dokaz se može provesti pravilima prirodnog zaključivanja, sustav kojih – kao i rezolucija opovrgavanjem – jest potpun.

Npr.:

(1)	$C \to B$	
(2)	$(B \leftrightarrow E) \land C$	
(3)	$D \to \neg E$	
(4)	C	(uklanjanjem konjunkcije iz 2)
(5)	B	(modusom ponensom iz 1 i 4)
(6)	$B \leftrightarrow E$	(uklanjanjem konjunkcije iz 2)
(7)	$(B \to E) \land (E \to B)$	(uvođenjem formule ekvivalentne formuli 6)
(8)	$B \to E$	(uklanjanjem konjunkcije iz 7)
(9)	E	(modusom ponensom iz 5 i 8)
(10)	$\neg D$	(modusom tolensom iz 3 i 9)
(11)	$\neg D \lor \neg A$	(uvođenjem disjunkcije iz 10)
(12)	$\neg(D \land A)$	(uvođenjem formule ekvivalentne formuli 11)

□

1.6. Metodom po izboru dokažite:

(a) $\neg R \land (P \to Q) \land (Q \to R) \vdash \neg P \lor S$.

(b) $\neg R,\ P \to (S \land W),\ Q \to R,\ Q \leftrightarrow S \vdash \neg P$.

(c) $P \to (R \lor S),\ (R \land S) \to Q \nvdash P \to Q$,

(d) $\neg A \to \neg C,\ D,\ (D \lor B) \to C \vdash E \to A$.

1.7. Formalno definirajte *ispravnost* pravila zaključivanja, a zatim:

(a) dokažite da je silogizam (pravilo lanca) ispravno pravilo zaključivanja,

(b) dokažite da abdukcija nije ispravno pravilo zaključivanja.

■ ***Rješenje:***

Pravilo zaključivanja je *ispravno* (adekvatno; eng. sound) ako, primijenjeno na skup premisa, izvodi formulu koja je *logička posljedica* tih premisa. Formalno, pravilo r je ispravno ako i samo ako:

$$\text{ako } F_1, \dots, F_n \vdash_r G \text{ onda } F_1, \dots, F_n \vDash G.$$

(a) Pravilo lanca (silogizam) glasi:

$$F \to G,\ G \to H \vdash F \to H$$

Kako bismo dokazali da je pravilo lanca ispravno, potrebno je dokazati da je dedukcija koji to pravilo izvodi doista logička posljedica danih premisa, odnosno treba dokazati da vrijedi:

$$F \to G,\ G \to H \vDash F \to H$$

Provjeru relacije '$\vDash$' provodimo pomoću tablice istinitosti. Kao i u prvome zadatku, relaciju možemo dokazati (i) prema definiciji, (ii) izravnom metodom ili (iii) metodom opovrgavanja. Dokažimo na prvi način:

F	G	H	$F \to G$	$G \to H$	$F \to H$	
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\leftarrow$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\leftarrow$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\leftarrow$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\leftarrow$

Iz tablice vidimo da, kadgod su obje premise istinite (retci označeni sa '$\leftarrow$'), istinita je i ciljna formula. Time je dokazano da je ciljna formula logička posljedica danih premisa.

(b) Pravilo abdukcije glasi:

$$G, F \to G \vdash F.$$

Primjerice, ovim pravilom iz premisa "Ulice su mokre" i "Ako pada kiša, ulice su mokre" mogli bismo zaključiti "Pada kiša". Međutim, kako bi ulice bi mogle biti mokre i iz nekog drugog razloga, to daje naslutiti da abdukcija *nije ispravno* (nije adekvatno) pravilo zaključivanja. Kada bi abdukcija bila ispravno pravilo zaključivanja, onda bi vrijedilo $G, F \to G \vDash F$. Kako bismo dokazali da to nije slučaj, potrebno je pokazati da:

$$G, F \to G \nvDash F.$$

Provjeru relacije '$\vDash$' odnosno '$\nvDash$' provodimo pomoću tablice istinitosti. Kao i u prvome zadatku, relaciju možemo dokazati (i) prema definiciji, (ii) izravnom metodom ili (iii) metodom opovrgavanja. Dokažimo na prvi način:

F	G	$F \to G$	F	
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\leftarrow$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\leftarrow$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	

Premise su istinite za interpretacije označene sa '$\leftarrow$'. U drugoj takvoj interpretaciji, međutim, navodna logička posljedica F nije istinita, prema tome F nije logička posljedica zadanih premisa. Time je dokazano da abdukcijsko pravilo nije ispravno pravilo zaključivanja. (Ovaj zaključak vrijedi kako za propozicijsku tako i za predikatnu logiku.) $\square$

1.8. Dokažite ispravnost rezolucijskog pravila zaključivanja.

Rezolucijsko pravilo glasi:

$$A \lor F, \neg A \lor G \vdash F \lor G$$

Ako je ovo pravilo ispravno, onda $F \lor G$ mora biti logička posljedica navedenih premisa, tj.:

$$A \lor F, \neg A \lor G \models F \lor G$$

Dokažimo gornju relaciju metodom opovrgavanja, tj. dokažimo da vrijedi:

$$\not\models (A \lor F) \land (\neg A \lor G) \land \neg(F \lor G)$$

A	F	G	$\overbrace{A \lor F}^{[1]}$	$\neg A$	$\overbrace{\neg A \lor G}^{[2]}$	$F \lor G$	$\overbrace{\neg(F \lor G)}^{[3]}$	[1] ∧ [2] ∧ [3]
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$

Formula je proturječna, pa zaključujemo da relacija logičke posljedice vrijedi te, posljedično, da je rezolucijsko pravilo ispravno.

1.9. Sljedeći niz koraka opisuje zaključivanje rezolucijom opovrgavanjem:

(1)	S	
(2)	$R \lor \neg S$	
(3)	$P \lor Q \lor \neg R$	
(4)	$\neg P \lor \neg Q$	
(5)	R	(iz 1,2)
(6)	$P \lor Q$	(iz 3,5)
(7)	nil	(iz 4,6)

Pronađite pogrešku u zaključivanju, i dokažite da pravilo koje je u tom slučaju primijenjeno nije ispravno.

■ ***Rješenje:***

Greška je počinjena pri izvođenju dedukcije (7): iz premisa 4 i 6 nije rezolucijskim pravilom moguće izvesti praznu klauzulu nil. Općenito, rezolucijom je moguće razrješiti *samo jedan par* komplementarnih literala, a ne više njih, kao što je to ovdje učinjeno. Formalno:

$$P \vee Q,\ \neg P \vee \neg Q \nvDash \mathsf{nil}$$

jer prazna klauzula nil (kontradikcija) nije logička posljedica navedenih premisa. Dokažimo to prema definiciji logičke posljedice:

P	Q	$P \vee Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$	nil	
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\leftarrow$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	

U trećem retku obje premise su istinite, ali ciljna formula nije. Prema tome, nil nije logička posljedica danih premisa, te pravilo nije ispravno. (Primijetite da nil može biti logička posljedica jedino proturječnih premisa, no iz takvih premisa ionako logički slijedi bilo što.)

Ispravna dedukcija iz premisa 4 i 6 je sljedeća:

$$P \vee Q,\ \neg P \vee \neg Q \vdash P \vee \neg P$$

ili

$$P \vee Q,\ \neg P \vee \neg Q \vdash Q \vee \neg Q.$$

Primijetite da su obje deduktivne posljedice tautologije, i zbog toga nisu od koristi u daljnjem postupku zaključivanja. □

1.10. Formalno definirajte kada je skup pravila zaključivanja *potpun*. Na proizvoljnom primjeru dokažite da rezolucijsko pravilo nije potpuno.

■ ***Rješenje:***

Skup pravila R je *potpun* ako je njime moguće izvesti sve logičke posljedice:

$$\text{ako } F_1, \ldots, F_n \vDash_R G \text{ onda } F_1, \ldots, F_n \vdash G.$$

Da bismo dokazali da rezolucijsko pravilo nije potpuno, treba pokazati da primjenom samo tog pravila ne možemo izvesti neku logičku posljedicu. To je najlakše pokazati na primjeru koji (u sustavu pravila prirodnog zaključivanja) iziskuje uvođenje disjunkcije ne bi li se izveo zadani cilj; primjer takvog slučaja jest dedukcija u zadatku 1.5. Još jednostavnije, nepotpunost rezolucijskog pravila možemo dokazati tako da utvrdimo kako, ako koristimo isključivo rezolucijsko pravilo, *ne* vrijedi $F \vdash F \vee G$, premda vrijedi $F \vDash F \vee G$. Da ne vrijedi $F \vdash F \vee G$ je očito, jer na sâmu premisu F rezolucijsko pravilo nije primjenjivo. Da vrijedi $F \vDash F \vee G$ moramo se u načelu uvjeriti tablicom istinitosti:

F	G	$F \vee G$	F	
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\leftarrow$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\leftarrow$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	

premda je to i intuitivno jasno na temelju pravila uvođenja disjunkcije (za koje znamo da *jest* ispravno). □

1.11. Formulu $\big(P \wedge (Q \rightarrow R)\big) \rightarrow S$ pretvorite u konjunktivnu normalnu formu.

■ ***Rješenje:***

Formula F je u konjunktivnoj normalnoj formi ako i samo ako je F u obliku $F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n$, $n \geq 1$, gdje su $F_1, \ldots, F_n$ disjunkcije literala, tj. formula F_i je oblika $G_{i1} \vee G_{i2} \vee \cdots \vee G_{im}$ gdje su G_{ij} literali (atomi ili njihove negacije).

Bilo koja formulu propozicijske logike može se pretvoriti u konjunktivnu normalnu formu u četiri slijedna koraka: (1) uklanjanje ekvivalencije, (2) uklanjanje implikacije, (3) dovođenje negacije neposredno uz atome i (4) primjena distributivnosti (i drugih ekvivalencija).

Pri pretvorbi zadane formule u konjunktivni normalni oblik prvi korak preskačemo jer formula ne sadržava ekvivalenciju. Koristeći ekvivalencije prema tablici u dodatku A, ostali koraci provode se kako slijedi:

$$
\begin{array}{ll}
\text{2. korak:} & \big(P \wedge (Q \rightarrow R)\big) \rightarrow S \equiv^{2\times[2]} \\
\text{3. korak:} & \neg\big(P \wedge (\neg Q \vee R)\big) \vee S \equiv^{[24]} \\
 & \big(\neg P \vee \neg(\neg Q \vee R)\big) \vee S \equiv^{[23]} \\
 & \big(\neg P \vee (\neg\neg Q \wedge \neg R)\big) \vee S \equiv^{[1]} \\
 & \big(\neg P \vee (Q \wedge \neg R)\big) \vee S \equiv^{[21]} \\
\text{4. korak:} & \big((\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg R)\big) \vee S \equiv^{[20]} \\
 & S \vee \big((\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg R)) \equiv^{[21]} \\
 & \big(S \vee (\neg P \vee Q)\big) \wedge \big(S \vee (\neg P \vee \neg R)\big) \equiv^{[18]} \\
 & (S \vee \neg P \vee Q) \wedge (S \vee \neg P \vee \neg R)
\end{array}
$$

□

1.12. Objasnite pojam faktorizacije i primjerom ilustrirajte njezin značaj u postupku rezolucije.

■ ***Rješenje:***

Faktorizacija je postupak uklanjanja višekratnog pojavljivanja istog literala u istoj klauzuli temeljem ekvivalencije $G \vee G \equiv G$. Neprovođenjem faktorizacije rezolucija opovrgavanjem gubi svojstvo *potpunosti*. Primjerice, za rezolucijsko pravilo vrijedi:

$$\neg A \vee \neg A, A \vee A \ \vdash\ A \vee \neg A.$$

Međutim, da su klauzule bile faktorizirane, rezolucijskim pravilom mogli bismo izvesti praznu klauzulu nil. Valja uočiti da je u ovom slučaju izvedena tautologija, i da ona *jest* logička posljedica danih premisa (čak štoviše, tautologija je logička posljedica bilo kakvih premisa). Drugim riječima, neprovođenjem faktorizacije nije dovedeno u pitanje to da je rezolucija *ispravno* pravilo zaključivanja, već samo njezina potpunost. Također valja naglasiti da, premda neprovođenje faktorizacije dovodi do nepotpunosti rezolucijskog pravila, to ne znači da nepotpunost nužno dolazi do izražaja. Npr.:

$$\neg A, A \vee A \;\vdash\; A$$

U ovom slučaju rezolucijsko pravilo izvodi cilj A, umjesto cilja nil, koji bi se izveo kada bi druga premisa bila faktorizirana. Međutim, izvedeni cilj sada se može kombinirati s prvom premisom kako bi se izvela prazna klauzula nil. Prema tome, u ovom slučaju neprovođenje faktorizacije manifestira se samo u potrebi za izvođenjem jednog dodatnog koraka. □

1.13. Koristeći rezoluciju opovrgavanjem dokaži da vrijedi:

$$\neg P \vee (Q \vee R), (Q \vee R) \to S \;\vdash\; P \to S.$$

U kojem koraku do izražaja dolazi važnost faktorizacije?

■ ***Rješenje:***

Prije rezolucije opovrgavanjem, premise i negaciju cilja potrebno je pretvoriti u klauzalni oblik koristeći ekvivalencije prema tablici u dodatku A:

$$\begin{array}{ll}
(1) & \neg P \vee (Q \vee R) \equiv^{[18]} \neg P \vee Q \vee R \\
(2) & (Q \vee R) \to S \equiv^{[2]} \neg(Q \vee R) \vee S \equiv^{[23]} (\neg Q \wedge \neg R) \vee S \equiv^{[20]} \\
 & S \vee (\neg Q \wedge \neg R) \equiv^{[21]} (S \vee \neg Q) \wedge (S \vee \neg R) \\
(3) & \neg(P \to S) \equiv^{[2]} \neg(\neg P \vee S) \equiv^{[23]} \neg\neg P \wedge \neg S \equiv^{[1]} P \wedge \neg S
\end{array}$$

Ove tri formule sačinjavaju ulazni skup premisa koji se sastoji od pet klauzula. Pri tome obje klauzule dobivene iz (3) sačinjavaju negaciju cilja. Rezolucijski postupak je sljedeći:

$$\begin{array}{lll}
(1) & \neg P \vee Q \vee R & \\
(2) & S \vee \neg Q & \text{premise} \\
(3) & S \vee \neg R & \\
(4) & P & \text{negacija cilja} \\
(5) & \neg S & \\
\hline
(6) & Q \vee R & \text{(iz 1,4)} \\
(7) & S \vee Q & \text{(iz 6,3)} \\
(8) & S & \text{(iz 2,7)} \\
(9) & \mathsf{nil} & \text{(iz 8,5)}
\end{array}$$

U gornjem postupku faktorizaciju smo proveli u koraku izvođenja formule (8). Bez faktorizacije, dobili bismo formulu $S \vee S$. U općenitom slučaju, neprovođenje faktorizacije dovodi do *gubitka potpunosti* rezolucijskog postupka. U konkretnom slučaju to se ne događa, jer ćemo razrješavanjem s klauzulom (5), provedenim dva puta, iz $S \vee S$ opet moći izvesti praznu klauzulu nil. Štoviše, rezoluciju je u ovom konkretnom slučaju moguće provesti a da se ne ukaže potreba za faktorizacijom, npr. na sljedeći način:

(1)	$\neg P \vee Q \vee R$	premise
(2)	$S \vee \neg Q$	premise
(3)	$S \vee \neg R$	premise
(4)	P	negacija cilja
(5)	$\neg S$	negacija cilja
(6)	$\neg Q$	(iz 2,5)
(7)	$\neg P \vee R$	(iz 1,6)
(8)	R	(iz 4,7)
(9)	S	(iz 3,8)
(10)	nil	(iz 5,9)

□

1.14. Relaciju $A,\ A \to B,\ B \to C \ \vdash\ C \vee D$ pokušajte dokazati uporabom sljedećih pravila zaključivanja:

(a) samo pravilom *modus ponens*,

(b) prirodnim zaključivanjem,

(c) izravnim rezolucijskim zaključivanjem,

(d) rezolucijom opovrgavanjem.

Što možete zaključiti o potpunosti ovih metoda?

1.15. Korištenjem (i) prirodnog zaključivanja i (ii) rezolucije opovrgavanjem dokažite da vrijedi:

(a) $(P \vee Q) \to S,\ Q \vee Q,\ S \to \neg R \ \vdash\ \neg(R \wedge P)$,

(b) $(P \vee Q) \to (V \wedge W),\ Q,\ R \to S,\ W \to \neg S \ \vdash\ \neg(R \wedge P)$,

(c) $C \to B,\ (B \leftrightarrow E) \wedge C,\ D \to \neg E \ \vdash\ \neg(D \wedge A)$.

Možemo li isto dokazati korištenjem izravnog rezolucijskog postupka?

1.16. Rezolucijom opovrgavanjem dokažite teorem:

$$\vdash \big((P \to Q) \wedge (Q \to R)\big) \to (P \to R).$$

Kojem pravilu prirodnog zaključivanja iz dodatka C odgovara navedena implikacija? Formulirajte to pravilo koristeći relaciju '$\vdash$'.

1.17. Objasni i primjerima ilustriraj prednosti i nedostatke:

(a) pravila zaključivanja u odnosu na izravnu metodu/metodu opovrgavanja,

(b) pravila prirodnog zaključivanja u odnosu na metodu rezolucije,

(c) rezolucije u odnosu na rezoluciju opovrgavanjem,

1.18. Zadane su sljedeće činjenice:

"Jednorog je besmrtan (B), ako je mitsko biće (A). Ako je jednorog besmrtan ili je obična smrtna životinja (C), onda je i rogat (D). Čim je jednorog rogat, onda je i magičan (E). No, ako nije besmrtan, onda je obična smrtna životinja."

Prikažite ove činjenice formulama propozicijske logike. Koristeći *linearnu rezoluciju* opovrgavanjem dokaži sud "Jednorog je magičan". (Linearna rezolucija je način izvođenja u kojem je jedna od roditeljskih klauzula uvijek rezolventa dobivena u prethodnom koraku.) Je li skup premisa redundantan?

1.19. Dan je sljedeći skup iskaza:

(1) "Očekujemo kišu ako nebo nije pretežno vedro."

(2) "Nebo je pretežno vedro ako i samo ako je dan i vidi se sunce, ili ako je noć i vidi se mjesec."

(3) "Dan je ako i samo ako nije noć."

(4) "Dan je i sunce se ne vidi."

Koristeći rezoluciju opovrgavanjem uz strategiju skupa potpore dokažite cilj "Očekujemo kišu".

Poglavlje 2

Zaključivanje uporabom predikatne logike

Predikatna logika prvog reda (eng. first order predicate logic, FOPL) proširuje sintaksu i semantiku propozicijske logike. Sintaktičko proširenje predstavlja uvođenje triju novih jezičnih konstrukata: *izraza*, *predikata* i *kvantifikatora*. Semantičko proširenje očituje se u uporabi znatno složenije definicije *interpretacije* formule od one koja se koristi u propozicijskoj logici. Temelj ovih proširenja čini usvajanje *ontološke pretpostavke* koju možemo sažeti u sljedećem: "Postoje objekti i relacije među njima". Ta je pretpostavka razrađenija od one propozicijske logike koja pretpostavlja da u svijetu postoje samo činjenice koje su ili istinite ili lažne. Posljedično, izražajna moć (ekspresivnost) predikatne logike nadilazi izražajnu moć propozicijske logike. To znači da u predikatnoj logici možemo opisati svijet kakav ne možemo opisati propozicijskom logikom, a također i izvoditi novo znanje o takvom svijetu kakvo ne možemo izvoditi u okviru propozicijske logike. Premda veća izražajna moć predikatne logike ima i svoju cijenu, ta je logika ipak sasvim prikladna za formalizaciju mnogih praktičnih problema koje uobičajeno iskazujemo prirodnim jezikom ili jezikom matematike. Upravo zbog toga, predikatna logika čini temelj mnogih formalizama prikaza znanja koji se danas koriste u području umjetne inteligencije.

U nastavku ćemo detaljno razmotriti sintaksu i semantiku logike, koje su od univerzalne važnosti, dok ćemo se u teoriji dokaza ograničiti na dokazivanje rezolucijskim postupkom koje je specifično za područje umjetne inteligencije, odnosno postupke automatskog zaključivanja. Također ćemo posebnu pažnju posvetiti tome kako rečenice prirodnog jezika možemo formalizirati jezikom predikatne logike.

2.1 Sintaksa predikatne logike prvoga reda

Sintaksa logike definira njen formalni jezik, odnosno nizove simbola koji sačinjavaju ispravne formule. Sintaksa predikatne logike koristi četiri vrste simbola:

(i) Individualni simboli ili konstante: nizovi znakova s velikim ili malim početnim slovom, npr. '*Ivan*', '*Ana*', '*pingvin*', zatim brojke te mala slova s početka abecede;

(ii) Simboli varijabli: mala slova s kraja abecede, npr. 'x', 'y', 'z', ...;

(iii) Funkcijski simboli: mala slova 'f', 'g', 'h', ... ili nizovi znakova pisani malim slovima, npr. '*plus*' (od konstanti se razlikuju po tome što nakon funkcijskog simbola obavezno slijedi otvorena zagrada);

(iv) Predikatni simboli: velika slova 'A', 'B', 'C',...; 'P', 'Q', 'R',... ili nizovi znakova pisani velikim slovima, npr. '*MAJKA*'.

Svaka pojedina funkcija i svaki pojedini predikat definirani su nad unaprijed zadanim brojem argumenata. Ako funkcijski simbol f uzima n argumenata, onda f nazivamo *n-mjesnim funkcijskim simbolom*. Slično, ako predikatni simbol P uzima n argumenata, onda P nazivamo *n-mjesnim predikatnim simbolom*. Jednomjesni predikatni simboli uobičajeno se koriste za opis *svojstava* objekata, dok se višemjesni predikatni simboli tipično koriste za opis n-arnih *relacija* između objekata. Predikatni simbol može biti i 0-mjesni, kada odgovara propoziciji propozicijske logike.

Definicija. *Izraz* (eng. term) predikatne logike prvog reda definiran je na sljedeći način:

(i) Konstanta je izraz;

(ii) Varijabla je izraz;

(iii) Ako je 'f' n-mjesni funkcijski simbol i '$t_1, \ldots, t_n$' su izrazi, onda je izraz i '$f(t_1, \ldots, t_n)$';

(iv) Ništa drugo nije izraz.

Definicija. Ako je 'P' n-mjesni predikatni simbol, a '$t_1, \ldots, t_n$' su izrazi, onda je '$P(t_1, \ldots, t_n)$' *atom*. Ništa drugo nije atom.

Atom koji je 0-mjesni (propozicija) pišemo bez pratećih zagrada, npr. kao 'P', a ne kao '$P()$'. Atomi su gradivni elementi formula predikatne logike.

U predikatnoj logici koristimo i dva posebna simbola, '$\forall$' i '$\exists$', koje vežemo uz varijable. Simboli '$\forall$' i '$\exists$' nazivaju se *univerzalni* odnosno *egzistencijalni kvantifikator*. Ako je x varijabla, onda '$(\forall x)$' čitamo "za svaki x" ili "za sve x", dok '$(\exists x)$' čitamo "postoji x", "za neki x" ili "za barem jedan x".

Prije nego što definiramo formalna pravila za oblikovanje takvih formula, potrebno je uvesti razliku između *slobodnih* i *vezanih varijabli*. Ova razlika temelji se na *dosegu* kvantifikatora: doseg kvantifikatora je podformula na koju se kvantifikator odnosi. Preciznije, to je najkraća podformula neposredno desno od kvantifikatora. Npr. doseg univerzalnog kvantifikatora u formuli '$\forall x \exists y P(x, y)$' je formula '$\exists y P(x, y)$'.

2.1. Odredite doseg kvantifikatora '$\exists x$' u sljedećim formulama:

(a) $\exists x P(x) \lor Q(x)$

(b) $\forall y \exists x \Big(P(x, y) \land \forall z Q(z, a)\Big)$

(c) $\exists x \forall y P(x, y) \land \forall x \forall z P(x, z)$

Definicija. Pojavljivanje varijable je *vezano* ako i samo ako je ono u dosegu kvantifikatora koji tu varijablu koristi, ili je pojavljivanje u samom kvantifikatoru. Pojavljivanje varijable je *slobodno* ako i samo ako ono nije vezano.

Definicija. Varijabla je *slobodna* u formuli ako je barem jedno njeno pojavljivanje slobodno u formuli. Varijabla je *vezana* u formuli ako je barem jedno njeno pojavljivanje vezano.

Npr. u formuli '$\forall x P(x, y)$' varijabla x je vezana jer su njena oba pojavljivanja vezana, dok je varijabla y slobodna jer je jedino njeno pojavljivanje slobodno. U formuli '$\forall x P(x, y) \land \forall y Q(y)$' varijabla y je ujedno i slobodna i vezana.

2.2. U sljedećim formulama odredite broj slobodnih pojavljivanja varijabli te broj slobodnih varijabli:

(a) $\forall x \forall y \forall z \big(P(x, y) \land P(y, z)\big) \to \exists w P(w, w)$

(b) $\exists x P(x) \lor \forall y \big(Q(x) \land R(x)\big)$

(c) $\exists y Q(f(x, x), f(x, x))$

(d) $\exists x \exists y \big(P(x, y) \land Q(x, y, z)\big)$

Formule koje ne sadržavaju varijable nazivamo *temeljnim formulama* (eng. ground formulas). Analogno, atome koji ne sadržavaju varijable nazivamo *temeljnim atomima*. Primjerice, formula '$P(a) \land Q(a, b)$' je temeljna formula koja se sastoji od dva temeljna atoma.

Formule predikatne logike gradimo pomoću atoma, kvantifikatora i logičkih veznika identičnih onima u propozicijskoj logici. Sada možemo i formalno definirati pravila za oblikovanje takvih formula.

Definicija. *Dobro oblikovana formula* (eng. well-formed formula, skraćeno *wff*) predikatne logike prvog reda definirana je rekurzivno na sljedeći način:

(i) Atom je wff.

(ii) Ako je F wff, onda je to i '$(\neg F)$'.

(iii) Ako su F i G wff, onda su to i '$(F \lor G)$', '$(F \land G)$', '$(F \to G)$' i '$(F \leftrightarrow G)$'.

(iv) Ako je F wff koja sadržava varijablu x koja u F nije vezana, onda su formule i '$(\forall x)F$' i '$(\exists x)F$'.

(v) Ništa drugo nije wff.

Dogovorno, zbog preglednosti, dopuštamo izostavljanje zagrada u pravilu (ii), zagrada u pravilu (iii) ako su one vanjske zagrade formule te zagrada u pravilu (iv). Primjerice, umjesto:

$$\big((\forall x)P(x) \land (\forall y)(\neg Q(y))\big)$$

pišemo jednostavnije:

$$\forall x P(x) \land \forall y \neg Q(y).$$

Ponekad se u literaturi, radi daljnjeg pojednostavljenja sintakse, definira i prioritet logičkih operatora (uobičajeno je to: '$\neg$', '$\vee$', '$\wedge$', '$\rightarrow$', '$\leftrightarrow$', navedeno u poretku padajućeg prioriteta), no mi takvu konvenciju nećemo usvojiti.

U pravilu (iv) uvođenje kvantifikatora uvjetovano je dvama uvjetima: varijabla koja se kvantificira mora u formuli postojati te ne smije već biti vezana. Prvim uvjetom sprječava se redundantno kvantificiranje (kvantificiranje nepostojećih varijabli), a drugim dvostruka kvantifikacija varijabli. Primjerice, formula '$\forall x P(y)$' nije dobro oblikovana jer ne zadovoljava prvi uvjet, dok formula '$\forall x \forall x P(x)$' nije dobro oblikovana jer ne zadovoljava drugi uvjet.

2.3. Za svaku od navedenih formula odredite je li dobro oblikovana:

(a) $\forall x(L(x,z))$

(b) $(\forall y)(\exists x)P(x,y,z)$

(c) $\exists x P(x) \rightarrow Q(a)$

(d) $\exists x\Big(P(x) \rightarrow \forall x \forall y Q(x,y)\Big)$

(e) $\forall x \forall y\Big(\forall z P(z,x) \rightarrow Q(y,z)\Big)$

2.2 Semantika predikatne logike prvoga reda

Semantika logike definira značenje formule. U predikatnoj logici, značenje formule proizlazi iz toga koje odnose između objekata formula čini istinitim, a koje čini lažnim. Primjerice, značenje atoma $VECI(x,y)$ može biti "x je veći od y" ako predikat *VECI* definiramo tako da $VECI(2,1) \equiv True$, $VECI(1,2) \equiv False$, itd. Ovakvo pridjeljivanje značenja predstavlja jednu moguću *interpretaciju*.

Definicija. *Interpretacija formule* u predikatnoj logici sastoji se od neprazne domene D i pridjeljivanja sljedećih vrijednosti svakoj konstanti, funkcijskom simbolu te predikatnom simbolu:[1]

1. Svakoj konstanti pridjeljuje se neki element iz skupa D.
2. Svakom n-mjesnom funkcijskom simbolu pridjeljuje se preslikavanje iz D^n u D.
3. Svakom n-mjesnom predikatnom simbolu pridjeljuje se preslikavanje iz D^n u $\{\top, \bot\}$.

Na prvi pogled, uvođenje interpretacije čini se suvišnim: nije li već iz samog naziva predikata očito da $VECI(x,y)$ znači "x je veći od y"? U formalnom sustavu logike odgovor na to je niječan. Predikatna logika je formalni sustav u kojemu interpretacija svakog simbola mora biti eksplicitno i formalno definirana. Pritom predikatna logika ostavlja punu slobodu u odabiru interpretacije: ništa nas ne sprječava da definiramo $VECI(1,2) \equiv True$, ili da predikat *VECI* nazovemo *MANJI*, a da pritom ne promijenimo njegovu interpretaciju.

[1] Ovdje dajemo donekle pojednostavljenu varijantu definicije interpretacije formule.

Premda je poželjno da simboli predikata, funkcija i konstanti dobro korespondiraju s njihovim uobičajenim značenjem, treba imati na umu da je njihovo značenje definirano interpretacijom, nikad njihovim nazivima.

Vrijednost istinitosti formule određuje se u odnosu na zadanu interpretaciju na sljedeći način:

(i) Istinitosti formula ‘$(\neg F)$’, ‘$(F \wedge G)$’, ‘$(F \vee G)$’, ‘$(F \to G)$’, ‘$(F \leftrightarrow G)$’ evaluiraju se u skladu s tablicama istinitosti propozicijske logike (v. str. 6) na temelju istinitosti formula F i G;

(ii) Formula ‘$(\forall x)F$’ evaluira se istinito ako i samo ako se formula F evaluira istinito za svaki element d iz skupa D;

(iii) Formula ‘$(\exists x)F$’ evaluira se istinito ako i samo ako se formula F evaluira istinito za barem jedan element d iz skupa D.

Valja primijetiti da se interpretirati mogu samo one formule koje ne sadržavaju slobodne varijable (takve formule nazivamo *interpretabilnima*). Primjerice, formula ‘$P(x)$’ nije interpretabilna jer je varijabla x u njoj slobodna, i zato nije određeno je li ona kvantificirana univerzalno ili egzistencijalno. Ponekad se usvaja konvencija po kojoj se slobodne varijable tretiraju kao konstante, ili se pak sintaktička pravila modificiraju na način da dobro oblikovana formula niti ne može sadržavati slobodne varijable. Mi nećemo usvojiti niti jednu od ovih konvencija, pa naše dobro oblikovane formule neće uvijek biti interpretabilne. Također valja primijetiti da su temeljne formule uvijek interpretabilne.

2.4. Odredi koje dobro oblikovane formule iz zadatka 2.3 su interpretabilne a koje nisu.

2.5. Odredi vrijednost istinitosti formule $\forall x \exists y P(x, y)$ u interpretaciji s domenom $D = \{1, 2\}$ i sljedećim pridjeljivanjem za predikatni simbol P:

$P(1,1)$	$P(1,2)$	$P(2,1)$	$P(2,2)$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$

■ ***Rješenje:***

Za $x = 1$ postoji vrijednost za y, i to 1, takva da je $P(1, y)$ istinito. Za $x = 2$ također postoji vrijednost za y, i to 2, takva da je $P(2, y)$ istinito. Prema tome, za navedenu interpretaciju, za svaki x iz D postoji y takav da je atom $P(x, y)$ istinit, pa za navedenu interpretaciju vrijedi $\forall x \exists y P(x, y)$. □

2.6. Za interpretaciju s domenom $D = \{a, b\}$ i sljedećim pridjeljivanjem za P:

$P(a,a)$	$P(a,b)$	$P(b,a)$	$P(b,b)$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$

odredite vrijednost istinitosti sljedećih formula:

(a) $\exists x \forall y P(x, y)$

(b) $\exists y \neg P(a, y)$

(c) $\forall x \forall y P(x, y)$

(d) $\forall x \forall y \big(P(x, y) \to P(y, x)\big)$

2.7. Dana je domena $D = \{a, b, c\}$. Neka je pridjeljivanje za f sljedeće:

$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$
a	c	a

Pridjeljivanje za P neka je sljedeće:

$P(a,a)$	$P(a,b)$	$P(a,c)$	$P(b,a)$	$P(b,b)$	$P(b,c)$	$P(c,a)$	$P(c,b)$	$P(c,c)$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$

a za Q neka je sljedeće:

$Q(a,a)$	$Q(a,b)$	$Q(a,c)$	$Q(b,a)$	$Q(b,b)$	$Q(b,c)$	$Q(c,a)$	$Q(c,b)$	$Q(c,c)$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$

Za svaku od sljedećih formula odredite najprije je li interpretabilna te ako jest, odredite vrijednost istinitosti:

(a) $\forall x \forall y \left(P(x, y) \lor P(y, x)\right)$

(b) $\neg \forall y \exists x\, Q(x, f(y))$

(c) $\forall x \forall y \big(P(x, y) \to \exists z\, Q(f(x), z)\big)$

(d) $Q(f(a), a) \land P(x, b)$

(e) $\forall x \big(\exists y\, P(x, y) \land \exists y\, Q(f(x), y)\big)$

Pojmovi konzistentnosti, nekonzistentnosti, valjanosti i logičke posljedice definirani su u predikatnoj logici na isti način kao i u propozicijskoj logici:

Definicija. Formula F je *konzistentna* (*zadovoljiva*, *ispunjiva*; eng. consistent, satisfiable) ako i samo ako postoji interpretacija I takva da se u I formula F vrednuje istinito. Ako je formula F istinita u interpretaciji I, onda kažemo da je I *model* od F a također i da I *zadovoljava* F.[2]

Definicija. Formula F je nekonzistentna (*nezadovoljiva*, *kontradiktorna*, *proturječna*, *antitautologija*) ako i samo ako ne postoji interpretacija koja zadovoljava F.

Definicija. Formula F je *valjana* (*tautologija*) ako i samo ako svaka interpretacija zadovoljava F.

[2]Ponekad se u literaturi *model* smatra istovjetnim *interpretaciji*, dakle, neovisno o tome zadovoljava li ta interpretacija formulu ili je ne zadovoljava.

Definicija. Formula G je *logička posljedica* formula $F_1, F_2, \ldots, F_n$ ako i samo ako za svaku interpretaciju I, ako je $F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n$ istinita u I, onda je G istinita u I. Da je G logička posljedica od $F_1, F_2, \ldots, F_n$ pišemo kao '$F_1, F_2, \ldots, F_n \vDash G$'.

Pri određivanju istinitosti formule predikatne logike uvijek valja imati na umu da se formula vrednuje *u odnosu na neku konkretnu interpretaciju*, a ne univerzalno. Pritom se interpretacija ne smije poistovjetiti s vezivanjem varijabli. Kako bismo ovo naglasili, razmotrimo formulu $\forall x P(x)$ interpretiranu nad domenom $D = \{1, 2, 3\}$ i sljedećim pridjeljivanjem za P:

$P(1)$	$P(2)$	$P(3)$
$\top$	$\top$	$\top$

Je li ova formula tautologija? Samo ako pogrešno poistovjetimo interpretaciju s pridjeljivanjem varijabli mogli bismo zaključiti da je formula tautologija. Da bi formula $\forall x P(x)$ bila tautologija, ona mora biti istinita za svaku interpretaciju, odnosno, mora biti istinita *neovisno o interpretaciji*. Formula $\forall x P(x)$ je doduše istinita za svaki x iz domene D, ali riječ je o samo jednoj od mogućih interpretacija. Lako je konstruirati interpretaciju u kojoj navedena formula neće biti istinita (npr. interpretacija u kojoj $P(3) \equiv \bot$). Zapravo, jedino što možemo reći o formuli $\forall x P(x)$ jest da je ona konzistentna. Naravno, to ne znači da u predikatnoj logici tautologije ne postoje. Primjerice, formula $\forall x(P(x) \vee \neg P(x))$ jest tautologija jer je istinita za svaku moguću interpretaciju.

2.8. Za svaku od sljedećih formula odredite je li nekonzistentna, konzistentna ili valjana:

(a) $\forall x(P(x) \wedge \neg P(x))$

(b) $\forall x P(x) \wedge \exists y \neg P(y)$

(c) $\forall x P(x) \vee \exists y \neg P(y)$

(d) $\forall x P(x) \rightarrow \exists y P(y)$

(e) $P(a) \rightarrow \neg \exists x P(x)$

Valja primijetiti da, s obzirom da različitih domena D ima beskonačno mnogo, u predikatnoj logici svaka formula ima beskonačno mnogo interpretacija. To pak znači da u predikatnoj logici valjanost ili nekonzistentnost formule nije moguće provjeriti na način da se formula vrednuje za svaku moguću interpretaciju, jer takav postupak nikada ne bi završio. S druge strane, provjeriti da formula *nije* tautologija je u načelu izvedivo, s obzirom da dovoljno pronaći tek jednu interpretaciju koja ne zadovoljava formulu. U tom smislu kažemo da je problem valjanosti formule predikatne logike *poluodlučiv* (eng. semi-decidable) (kraće kažemo i da je predikatna logika *poluodlučiva*).[3] To predikatnu logiku čini bitno različitom od propozicijske logike kod koje je broj mogućih interpretacija konačan (premda eksponencijalan u broju propozicijskih varijabli) i koja je zbog toga odlučljiva. Poluodlučivost predikatne

[3] Problem je *odlučiv* ako postoji postupak koji uvijek (u konačnom vremenu) rezultira odgovorom "da" ili "ne". Problem je *poluodlučiv* ako postoji postupak koji samo u jednom od ova dva slučaja uvijek (u konačnom vremenu) daje odgovor, ali ne u oba slučaja.

logike vrijedi također i za pripadnu teoriju dokaza: premda u predikatnoj logici postoje postupci kojima je moguće dokazati da je F teorem, ako F to doista jest, takvi postupci mogu nikada ne završiti ako F nije teorem. Odlučivost je cijena koju predikatna logika plaća za svoju povećanu ekspresivnost.

2.3 Formalizacija rečenica prirodnog jezika

Većina ljudskog znanja izražava se prirodnim jezikom. Stoga i ne čudi ponekad opsesivna težnja pojedinih znanstvenih pravaca, posebice simboličkog pravca u umjetnoj inteligenciji, da znanje iskazano prirodnim jezikom na neki način prevede u strogi formalni oblik. Na taj način znanje bi postalo koncizno, lišeno višeznačnosti i pogrešnog tumačenja, a možda bi omogućilo i jednostavno mehaničko izvođenje novog znanja postupkom koji bi, idealno, bio sveden na puku manipulaciju nad simbolima.

Zahvaljujući minimalnim ontološkim pretpostavkama, predikatna logika prikladna je za formalizaciju mnogih iskaza prirodnog jezika.[4] Taj postupak zahtijeva svojevrsnu izvježbanost, osobito u slučajevima kada je rečenica prirodnog jezika višeznačna. U nastavku ćemo promotriti neke tipične primjere formalizacije rečenice prirodnog jezika, i to najprije one kod kojih višeznačnost ne postoji.

Razmotrimo najprije iskaze o pojedinačnim objektima domene, poput:

"Ivan je marljiv student."

Neka '$S(x)$' označava "x je student", '$M(x)$' neka označava "x je marljiv", a konstanta '$Ivan$' neka označava Ivana. Formula koja odgovara navedenoj rečenici je sljedeća:

$$S(Ivan) \land M(Ivan).$$

S druge strane, možemo koristiti samo jedan predikat koje objedinjuje oba značenja, primjerice '$P(x)$' sa značenjem "x je marljiv student", i rečenicu formalizirati na sljedeći način:

$$P(Ivan).$$

I jedna i druga formalizacija su ispravne, a razlikuju se u razini apstrakcije. Odabir razine apstrakcije ovisi o kontekstu. U kontekstu u kojemu su pojmovi "marljivost" i "student" uvijek povezani,[5] druga formalizacija vjerojatno je prikladnija, dok je u kontekstu gdje ta dva pojma treba razlikovati, prikladnija prva formalizacija. Možemo usvojiti još višu razinu apstrakcije te umjesto 1-mjesnog predikata P koristiti propoziciju u značenju "Ivan je marljiv

[4]Ipak, potrebno je spomenuti i neka ograničenja koja pri srazu logike s lingvistikom izlaze na vidjelo. Najprije, predikatnom logikom moguće je formalizirati samo izjavne rečenice, dakle, samo one rečenice koje imaju istinosnu vrijednost. U svakodnevnoj komunikaciji, međutim, koristimo čitav niz drugih vrsta izjava (u lingvističkoj terminologiji: drugih *govornih činova*), poput naredbi, molbi, pitanja i sl.; takve rečenice ne možemo formalizirati predikatnom logikom jer one ne iznose nikakvu tvrdnju već zapravo djeluju kao akcije. Također, formalizaciji jezikom predikatne logike odupiru se izjave koje su vezane uz mentalna stanja govornika, poput njegovih vjerovanja ili intencija. Takve izjave zahtijevaju razrađenije *epistemološke pretpostavke* (pretpostavke o tome kakvo može biti znanje), i prikladnije se formaliziraju drugim vrstama logike, posebice *modalnim logikama*.

[5]Možete li dati primjer takvog konteksta?

student". S druge strane, razinu apstrakcije možemo i smanjiti te pretpostaviti da Ivana može biti raznih; u tom slučaju Ivan više nije jedinstveni objekt domene te bismo umjesto konstante *Ivan* morali koristili predikat $IVAN(x)$.

Premda izbor razine apstrakcije ovisi o kontekstu, postoje neke smjernice pri formalizaciji rečenica prirodnog jezika formulama predikatne logike:

1. Imenice, bilo apstraktne ili konkretne, formaliziraju se ili kao konstante ili kao jednomjesni predikati. Ako je riječ o pojedinačnom i jedincatom objektu domene, onda imenicu formaliziramo konstantom. Tipično su to vlastite imenice. Npr. ako je Ivan jedinstveni objekt domene, onda ga možemo označiti konstantom '*Ivan*'. S druge strane, opće imenice tipično formaliziramo kao jednomjesne predikate. Npr. "student" ćemo tipično formalizirati predikatom '$STUDENT(x)$', jer je ovdje riječ o čitavoj kategoriji, a ne o jednoj individui. Tada atom $STUDENT(Ivan)$ u stvari iskazuje da je *Ivan* instanca kategorije $STUDENT$.

2. Pridjevi se tipično formaliziraju kao jednomjesni predikati (npr. '$MARLJIV(x)$'). Komparativi pridjeva (npr. "veći", "marljiviji") upućuju na relaciju između dva objekta pa se uobičajeno formaliziraju dvomjesnim predikatima (npr. '$VECI(x, t)$', '$MARLJIVIJI(x, y)$').

3. Glagoli upućuju na n-mjesne relacije između objekata koji su uspostavljeni samim činjenjem neke radnje, pri čemu n ovisi o vrsti radnje. Npr. "voljeti" se tipično formalizira dvomjesnim predikatom '$VOLI(x, y)$', dok se "prodavati" može formalizirati tromjesnim predikatom '$PRODAJE(x, y, z)$' u smislu "x prodaje stvar y kupcu z".

2.9. Sljedeće rečenice napišite kao formule predikatne logike:

(a) "Vlatka je pametna studentica."
(b) "Ivan je student koji studira u Zagrebu."
(c) "Ivan i Ana nisu marljivi studenti."
(d) "Ana voli svoju sestru Vlatku."
(e) "Ivan Ani prodaje maglu."

Razmotrimo sada univerzalne iskaze tipa "Svaki taj i taj je takav i takav", ili, ekvivalentno, "Svi takvi i takvi su to i to". Primjerice:

"Svi studenti su pametni."

(Primijetite da rečenica "Studenti su pametni" također podrazumijeva univerzalnu kvantifikaciju.) Ovakve izraze formaliziramo pomoću univerzalne kvantifikacije i implikacije:

$$\forall x\big(S(x) \to P(x)\big).$$

gdje $S(x)$ odgovara "x je student" a $P(x)$ odgovara "x je pametan". Ova je formula, dakle, ekvivalentna izjavi: "Ako je x student, onda je x pametan". No što ako x nije student? Ako x nije student, onda $S(x) \equiv \bot$, tj. antecedens implikacije je lažan. Iz semantike operacije implikacije slijedi da ako je antecedens implikacije lažan, onda je cijela implikacija istinita, tj. $\perp \rightarrow F \equiv \top$, neovisno o istinitosti formule F (uvjerite se u ovo na temelju tablice istinitosti!). Prema tome, ako x nije student, implikacija će biti isinita, a to je upravo ono što smo htjeli postići. Naime, svrha formalizacije rečenica prirodnog jezika jest napisati formulu koja odgovara značenju rečenice i koja je *istinita*. Podsjetimo se: svaka kozistentna formula ima neke interpretacije za koje je istinita; takve interpretacije nazvali smo *modelima*. Naš je zadatak stoga napisati formulu koja će biti istinita u onim i samo onim interpretacijama koje odgovaraju svijetu kakav opisuje zadana rečenica – drugim riječima, model formule mora odgovarati značenju rečenice. U gornjem primjeru to upravo postižemo implikacijom: modeli ove formule jesu sve one interpretacije u kojima je svaki student pametan, dok sve ono što nije student može ili ne mora biti pametno, budući da to ionako nije predmetom ove rečenice. Primjerice, ako je domena $D = \{Ana, Ivan, Toro\}$ te ako pretpostavimo da su *Ana* i *Ivan* studenti, a da *Toro* nije, onda je sljedeća interpretacija:

$S(Ana)$	$S(Ivan)$	$S(Toro)$	$P(Ana)$	$P(Ivan)$	$P(Toro)$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$

model gornje formule, dok interpretacija:

$S(Ana)$	$S(Ivan)$	$S(Toro)$	$P(Ana)$	$P(Ivan)$	$P(Toro)$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

nije model gornje formule. (Navedite još nekoliko primjera interpretacija koje jesu i koje nisu model gornje formule.)

Postupak formalizacije rečenica prirodnog jezika možemo, dakle, zamisliti kao stvaranje konceptualnih modela rečenica, odnosno *modeliranja* svijeta u formalnom jeziku logike. Pritom implikaciju često koristimo kao "filtar" koji omogućava da tvrdnju ograničimo samo na odabrane objekte svijeta. Na taj način modeli postaju manje specifični, ili, točnije, broj modela formule se povećava.

Izdvojimo i tri tipične pogreške pri formalizaciji ovakvih i sličnih rečenica:

1. Česta greška pri formalizaciji univerzalnih iskaza jest korištenje konjunkcije na mjestu implikacije. Rečenica "Svi studenti su pametni" pokušava se formalizirati ovako:

$$\forall x \big(S(x) \land P(x) \big).$$

   Na temelju gornjeg razmatranja lako je zaključiti da je ova formalizacija pogrešna. Formula odgovara iskazu "svaki x je student i svaki x je pametan", odnosno "sve je student i sve je pametno", a to je mnogo jača tvrdnja od one koju iskazuje rečenica. Modeli ove formule jesu samo one interpretacije u kojima u svi objekti ujedno i pametni i studenti. Primijetite da niti jedna od dvije gore navedene interpretacije nisu modeli ove rečenice.

2. Čestu pogrešku predstavlja i sljedeći pokušaj formalizacije:

$$\forall student\ P(student).$$

Problem s ovom formalizacijom jest što se značenje formule pokušava definirati na sintaktičkoj razini, o čemu je već bilo govora u poglavlju 2.2. Naziv varijable *student* je posve proizvoljan i ne postoji nikakva povezanost između tog naziva i svojstava objekata u domeni. Umjesto *student*, varijablu smo mogli nazvati x te pisati '$\forall x P(x)$', što je evidentno pogrešno ("sve je pametno").

Gornja formalizacija na prvi pogled nalikuje sljedećoj:

$$\forall x \in Student\ P(x).$$

gdje je *Student* skup onih objekata iz domene koji su studenti, $Student \subseteq D$. Ova formalizacije je načelno ispravna, ali je u okviru predikatne logike ipak pogrešna budući da formula nije dobro oblikovana: '$\in$' nije simbol predikatne logike, niti je formulu moguće izgraditi sintaktičkim pravilima definiranima u poglavlju 2.1. Formula nije niti semantički ispravna jer u semantici predikatne logike ne postoji mogućnost da se eksplicitno definiraju podskupovi domene. Ako u predikatnoj logici želimo iskazati da je x element nekog skupa, onda to u predikatnoj logici moramo napraviti tako da iskažemo da x ima svojstvo koje ga čini članom tog skupa. Prema tome, ako želimo da x bude element iz skupa *Student*, onda to moramo iskazati da "x ima svojstvo studenta", primjerice atomom '$S(x)$'. Na taj način opet dobivamo formulu:

$$\forall x \big(S(x) \to P(x)\big).$$

za koju smo već utvrdili da je ispravna formalizacija navedene rečenice.

3. Također česta greška jest pogrešno definirani doseg kvantifikatora:

$$\forall x S(x) \to P(x).$$

Ova je formula dobro oblikovana, međutim nije interpretabilna (zašto?).

Ustvrdili smo dakle da je formula:

$$\forall x \big(S(x) \to P(x)\big).$$

ispravna formalizacija rečenice "Svi studenti su pametni". Zahvaljujući implikaciji, svojstva objekata domene koji nisu studenti ne utječu na to što jest a što nije model ove formule. Međutim, što ako u domeni D ne postoje objekti koji su studenti? Što ako studenti ne postoje? Očito, ako ne postoji niti jedan x takav da $S(x) \equiv \top$, onda je naša formula istinita. Ispada dakle da su interpretacije u kojima nema studenata također modeli naše formule! Ovaj problem, poznat pod nazivom *egzistencijalna težina univerzalne kvantifikacije*, svodi se na pitanje treba li ovakav iskaz podrazumijevati postojanje objekta o kojemu se u njemu govori. Čini se apsurdnim iskazivati rečenicu o nepostojećim objektima. Međutim, očito je da u ovom slučaju u okviru semantike predikatne logike postojanje objekta nije nužno. Ako pak želimo isključiti takvu interpretaciju formule (dakle, ako želimo da svijet u kojemu nema studenata

ne bude model ove formule), ne preostaje nam drugo nego da formulu postrožimo na sljedeći način:
$$\forall x\big(S(x) \rightarrow P(x)\big) \wedge \exists x S(x).$$

Razmotrimo sada rečenice tipa "Niti jedan takav i takav nije to i to". Primjerice:

"Niti jedan student nije pametan."[6]

Ispravnu formalizaciju ove rečenice predstavlja sljedeća formula:

$$\forall x\big(S(x) \rightarrow \neg P(x)\big)$$

koja odgovara tvrdnji "Ako je x student, onda x nije pametan".[7] Gornja formula je ekvivalentna sljedećoj formuli (provjerite!):

$$\forall x \neg\big(S(x) \wedge P(x)\big),$$

odnosno formuli:
$$\neg\exists x\big(S(x) \wedge P(x)\big)$$

koje odgovaraju iskazu "svi x nisu ujedno i studenti i pametni", odnosno "nema takvog x da je ujedno i student i pametan". Sve su ovo, dakako, ispravne formalizacije navedene rečenice.

Razmotrimo sada egzistencijalno kvantificirane izjave, poput:

"Neki studenti su pametni."

Ispravna formalizacija je sljedeća:
$$\exists x\big(S(x) \wedge P(x)\big)$$

te ona odgovara iskazu "postoji x takav da je x ujedno i student i pametan". Ništa nije rečeno o tome postoji li samo jedan takav x, ili ih postoji više: egzistencijalna kvantifikacija znači da postoji *barem* jedan. Bitno je naglasiti da formula:

$$\exists x\big(S(x) \rightarrow P(x)\big).$$

nije ispravna formalizacija navedene rečenice. Kako bismo razumjeli zašto je to tako, napišimo ovu formulu u ekvivalentnom obliku:

$$\exists x\big(\neg S(x) \vee P(x)\big).$$

Ova formula odgovara iskazu "postoji x takav da x nije student ili x je pametan". Očito je da će ova formula biti istinita ako postoji nešto što nije student. Onda, čak i ako niti jedan student nije pametan, ova će formula biti istinita čim postoji nešto što nije student. Formule ovakvog oblika gotovo su uvijek istinite te epistemološki bezvrijedne.

[6] Ova izjava služi kao primjer i ne pretendira biti istinita.

[7] Primijetite da je to ekvivalentno rečenici "Svi studenti nisu pametni", koja međutim nije ispravna, ili barem nije uobičajena, u hrvatskom jeziku, i koju ne treba brkati s rečenicom "Nisu svi studenti pametni".

2.10. Sljedeće rečenice napišite kao formule predikatne logike:

(a) "Auti su skupi."
(b) "Neki ljudi nisu pismeni."
(c) "Bicikli nisu skupi."
(d) "Neke su pogreške fatalne."
(e) "Svi bogataši su škrti."
(f) "Najbolje stvari na svijetu su besplatne."
(g) "Neki Amerikanci ne vole hamburger."
(h) "Svi Francuzi vole sir."
(i) "Svi vole Raymonda"
(j) "Raymond ne voli nikoga"
(k) "Nitko ne voli nikoga"

te za svaku formulu navedi primjer interpretacije koja ju zadovoljava (model) i interpretacije koja ju ne zadovoljava. Kod kojih rečenica do izražaja dolazi problem egzistencijalne težine univerzalne kvantifikacije?

2.11. Sljedeće rečenice napišite kao formule predikatne logike:

(a) "Svaka žaba voli mušice tuste."
(b) "Postoji bara u kojoj su sve žabe sretne."
(c) "Dok ima lopoča, ima i žaba."
(d) "Kada pada kiša, žabe su sretne, a čaplje nisu."
(e) "U svakoj bari u kojoj ima žaba postoji i glavna žaba."
(f) "Samo su glavne žabe pjegave."
(g) "Nema sretnih glavnih žaba."
(h) "Glavne žabe su ili sretne ili očajne."

■ ***Rješenje:***

Razmotrimo najprije moguća svojstva objekata i njihove međusobne relacije, a zatim uvedimo odgovarajuće konstante, funkcije i predikate. U navedenim rečenicama spominju se sljedeće kategorije objekata: *žabe*, *lopoči*, *bare*, *čaplje* i *mušice*. Pojedinačni objekti u našoj domeni bit će primjerci neke od navedenih kategorija. Stoga uvodimo predikate: $Z(x)$, $L(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $M(x)$ kojima iskazujemo kategoriju objekta x. U ovom slučaju *kišu* (rečenica (d)) možemo smatrati posebnom pojavom koja nije primjerak neke kategorije te ćemo činjenicu da pada kiša jednostavno iskazati propozicijom (0-mjesnim predikatom) *KISA* (ovo je, dakako, pitanje odabira razine apstrakcije). U rečenicama se još spominju pridjevi *tust*, *pjegav*, *sretan*, i *očajan*, koje ćemo iskazati jednomjesnim predikatima $T(x)$, $P(x)$, $S(x)$, odnosno $O(x)$. U rečenicama se spominju sljedeće radnje: *sjediti* (na lopoču), *voljeti* i *moći izbjegavati*. Prve dvije relacije vrijede između dva objekta, stoga ćemo ih iskazati dvomjesnim predikatima: $V(x,y)$ i $N(x,y)$. Također će nam trebati još i predikat $U(x,y)$ kako bismo iskazali da se neka žaba nalazi u točno određenoj bari.

(a) "Svaka žaba voli mušice tuste."

$$\forall x \forall y \Big(\big(Z(x) \land M(y) \land T(y) \big) \to V(x,y) \Big),$$

ili neki od ekvivalentnih oblika, npr.:

$$\forall x \Big(Z(x) \to \forall y \big(M(y) \to \big(T(y) \to V(x,y) \big) \big) \Big).$$

Primijeti da, strogo govoreći, prva formula nije dobro oblikovana formula (wff) jer ima konjunkciju s više od dva člana. Međutim, kako je operator '$\land$' asocijativan, interpretacija formule nije dovedena u pitanje.

(b) "Postoji bara u kojoj su sve žabe sretne."

$$\exists x \Big(B(x) \land \forall y \big(\big(Z(y) \land U(y,x) \big) \to S(y) \big) \Big),$$

ili neki od ekvivalentnih oblika. Iste tvrdnju mogli bismo pokušati formalizirati na sljedeći način:

$$\exists x \Big(B(x) \to \forall y \big(\big(Z(y) \land U(y,x) \big) \to S(y) \big) \Big),$$

no, kao što je objašnjeno ranije, ova formalizacija nije ispravna jer je trivijalno istinita čim postoji nešto što nije bara.

Valja primijetiti da u oba slučaja postoji problem egzistencijalne težine univerzalne kvantifikacije. Naime, u oba slučaja model formula jesu i one interpretacije kod kojih žaba u bari uopće nema. Problem se može riješiti ugradnjom dodatnog uvjeta:

$$\exists x \Big(B(x) \land \forall y \big(\big(Z(y) \land U(y,x) \big) \to S(y) \big) \land \exists y \big(Z(y) \land U(y,x) \big) \Big),$$

te slično tome i u drugom slučaju. Ponovno treba napomenuti da ova formula nije dobro oblikovana formula (wff), međutim njena je interpretacija jednoznačna.

(c) "Dok ima lopoča, ima i žaba."

$$\exists x L(x) \to \exists x Z(x)$$

Alternativno, rečenica se može shvatiti u smislu da žaba ima dok ima i lopoča, no da žaba inače nema. U tom slučaju implikaciju zamjenjujemo ekvivalencijom.

(d) "Kada pada kiša, žabe su sretne a čaplje nisu."

$$K \rightarrow \big(\forall x(Z(x) \rightarrow S(x)) \,\wedge\, \forall x(C(x) \rightarrow \neg S(x))\big)$$

Rečenica govori samo o slučajevima kada pada kiša, stoga koristimo implikaciju kako bismo se ogradili od svih ostalih interpretacija. Implikaciju također koristimo kako bismo se ograničili na objekte iz kategorije žaba odnosno čaplji, jer želimo iskazati svojstva samo tih objekata, a ne i nekih drugih objekata iz domene (npr. lopoča ili mušica).

(e) "U svakoj bari u kojoj ima žaba postoji i glavna žaba."

$$\forall x\Big(\big(B(x) \,\wedge\, \exists y\big(Z(y) \wedge U(y,x)\big)\big) \rightarrow \exists z\big(Z(z) \wedge G(z)\big)\Big)$$

Eventualno bismo mogli umjesto $G(z)$ pisati $G(z, x)$ ako kontekst iziskuje da glavnu žabu povežemo s konkretnom barom kao područjem njene ingerencije

(f) "Samo su glavne žabe pjegave."

$$\forall x\big(P(x) \rightarrow \big(Z(x) \,\wedge\, G(x)\big)\big).$$

Alternativa je sljedeći, nešto slabiji iskaz (zašto je ovaj iskaz slabiji?):

$$\forall x\big(\big(P(x) \,\wedge\, Z(x)\big) \rightarrow G(x)\big).$$

(g) "Nema sretnih glavnih žaba."

$$\neg\exists x\big(Z(x) \,\wedge\, S(x) \,\wedge\, G(x)\big).$$

Strogo govoreći, niti ova formula nije dobro oblikovana formula. Ovoj formuli ekvivalentna je sljedeća formula:

$$\forall x\neg\big(Z(x) \,\wedge\, S(x) \,\wedge\, G(x)\big),$$

kao i formule:

$$\forall x\big(\big(Z(x) \,\wedge\, G(x)\big) \rightarrow \neg S(x)\big),$$

$$\forall x\big(\big(Z(x) \,\wedge\, S(x)\big) \rightarrow \neg G(x)\big),$$

$$\forall x\big(\big(S(x) \,\wedge\, G(x)\big) \rightarrow \neg Z(x)\big),$$

te neke druge.

(h) "Glavne žabe su ili sretne ili očajne."

$$\forall x\Big(\big(Z(x)\ \wedge\ G(x)\big) \rightarrow \Big(\big(S(x) \wedge \neg O(x)\big)\ \vee\ \big(\neg S(x) \wedge O(x)\big)\Big)\Big).$$

Ovdje treba paziti na to da se *ili...ili* konstrukt hrvatskoga jezika u logici formalizira operacijom *isljučivog ili*. Operacija *isključivog ili*, međutim, nije dio niti sintakse niti semantike predikatne logike, ali se može nadomjestiti ekvivalentnom formulom $(F\ \wedge\ \neg G)\ \vee\ (\neg F\ \wedge\ G)$. □

2.12. Sljedeće rečenice napišite kao formule predikatne logike:

(a) "Postoji žaba koja sjedi na lopoču."
(b) "Niti na jednom lopoču ne sjedi žaba"
(c) "Svaka žaba poznaje Toru, a Toro poznaje sve čaplje"
(d) "Poncho vidi čaplju samo kada čaplja vidi Poncu"
(e) "Svaka žaba voli mušice tuste, ali niti jedna mušica ne voli žabe."
(f) "Ako ništa nije pjegavo, onda ne postoje niti pjegave žabe."
(g) "Na svakom lopoču ili sjedi ili ne sjedi žaba."
(h) "Ako Toro ne voli samog sebe, onda ne voli ništa."

2.13. Sljedeće rečenice napišite kao formule predikatne logike:

(a) "Svaki predmet nije položio barem jedan student, ali neki nisu položili niti jedan predmet."
(b) "Samo studenti koji su položili ASP položili su UI."
(c) "Apsolvent je student koji je položio sve predmete."
(d) "Studenti koji su položili samo jedan predmet položili su predmet s prve godine."
(e) "Neki studenti položili su predmet s više godine a da nisu položili sve predmete s niže godine."

2.14. Sljedeće rečenice napišite kao formule predikatne logike:

(a) "Sve što je fino je ili nezdravo ili deblja."
(b) "Linux je najbolji operacijski sustav."
(c) "Ivo voli sve vrste hrane."
(d) "Laž je sve ono što netko kaže a nije istinito."
(e) "Ništa nije tako dosadno kao pisati blog o blogu."

U primjerima do sada višeznačnost prirodnog jezika nije došla do izražaja. Razmotrimo sada slučajeve višeznačnih rečenica. Tipično višeznačne rečenice jesu one koje iziskuju formalizaciju s ugniježđenom kvantifikacijom. Razmotrimo sljedeću rečenicu:

"Svatko nekoga voli."

Ovu rečenicu možemo shvatiti dvojako: ili "postoji netko koga svatko voli", ili "svatko voli neku, ovu ili onu osobu". U prvom slučaju:

$$\exists y \forall x V(x, y)$$

dok u drugom:

$$\forall x \exists y V(x, y)$$

gdje '$V(x, y)$' ima značenje "x voli y". Razlika se, dakle, svodi na poredak između univerzalnog i egzistencijalnog kvantifikatora. Postavlja se pitanje: koja od ovih dviju formalizacija je ispravna? Ne postoji univerzalni odgovor na ovo pitanje. Pri formalizaciji višeznačne rečenice potrebno je u obzir uzeti njezin kontekst, ali također i osloniti se na zdrav razum (v. zad. 2.16).

Možemo se, međutim, pitati koja je od gornjih tvrdnji jača a koja slabija. Lako je pokazati (v. zad. 2.27) da vrijedi:

$$\exists y \forall x V(x, y) \models \forall x \exists y V(x, y)$$

tj. iz lijeve formule logički slijedi desna formula. Prema tome, $\forall x \exists y V(x, y)$ je slabija izjava od $\exists y \forall x V(x, y)$. Sasvim sigurno, ako postoji netko koga svatko voli, npr. Raymond, onda svi mi volimo Raymonda, pa dakle svatko od nas voli nekoga; obrat, dakako, ne vrijedi.

2.15. Sljedeću rečenicu napišite kao formulu predikatne logike:

> "Možete varati sve ljude neko vrijeme, čak možete varati neke ljude sve vrijeme, ali ne možete varati sve ljude sve vrijeme."[8]

■ ***Rješenje:***

Promatrajmo zasebno tri dijela gornje rečenice.

(a) "Možete varati sve ljude neko vrijeme,..."
Ova je rečenica višeznačna i može se formalizirati na dva načina. Prvo tumačenje jest sljedeće: postoji neko vrijeme (neki period) u kojem sve ljude (istovremeno) možete prevariti.[9] Označimo s '$P(x)$' "x je period", s '$O(x)$' "x je osoba" te s '$V(x, y)$' "x može biti varan u periodu y". Formalizacija je tada sljedeća:

$$\exists y\Big(P(y) \land \forall x\big(O(x) \rightarrow V(x, y)\big)\Big).$$

Ovdje treba biti oprezan i ne počiniti ranije elaboriranu pogrešku zamjene '$\land$' s '$\rightarrow$':

$$\exists y\Big(P(y) \rightarrow \forall x\big(O(x) \rightarrow V(x, y)\big)\Big),$$

[8] *"You may fool all the people some of the time, you can even fool some of the people all of the time, but you cannot fool all of the people all the time"* (Abraham Lincoln).

[9] Npr. u jeku predizborne kampanje.

jer je ova formula trivijalno istinita čim u domeni postoji nešto što nije period.

No moguće je i drugo tumačenje: svakog je čovjeka moguće prevariti u nekom periodu njegova života.[10] U tom slučaju formalizacija je sljedeća:

$$\forall x\Big(O(x) \to \exists y\Big(P(y) \wedge V(x,y)\Big)\Big).$$

I ovdje moramo paziti da ne napravimo sljedeću pogrešnu formalizaciju:

$$\forall x\Big(O(x) \to \exists y\Big(P(y) \to V(x,y)\Big)\Big).$$

jer je i ova formula trivijalno istinita (koji je model ove formule?).

(b) "...čak možete varati neke ljude sve vrijeme,..."

Veznik *čak* je sastavni i on samo indicira da će ovaj dio rečenice biti u konjunkciji s prethodnim. No ova je rečenice također višeznačna. Prvo tumačenje je ovo: cijelo vrijeme (čitav period) može se nekoga varati (ali to ne mora biti uvijek ista osoba).[11] U tom slučaju:

$$\forall y\Big(P(y) \to \exists x\Big(O(x) \wedge V(x,y)\Big)\Big).$$

Drugo je tumačenje ovo: postoje ljudi (naivčine) koje možete varati sve vrijeme. Formalizacija je sljedeća:

$$\exists x\Big(O(x) \wedge \forall y\Big(P(y) \to V(x,y)\Big)\Big).$$

U oba slučaja zamjena '$\wedge$' s '$\to$' bila bi pogrešna.

(c) "...ali ne možete varati sve ljude sve vrijeme."

Veznik *ali* ima sastavnu funkciju i indicira da će ovaj dio rečenice biti u konjunkciji s prethodnima. Ova rečenica nije višeznačna, no ima više ekvivalentnih formalizacija:

$$\neg\Big(\forall x \forall y\Big(\Big(O(x) \wedge P(y)\Big) \to V(x,y)\Big),$$

ili:

$$\neg\Big(\forall x \forall y\Big(O(x) \to \Big(P(y) \to V(x,y)\Big)\Big),$$

ili:

$$\exists x \exists y\Big(O(x) \wedge P(y) \wedge \neg V(x,y)\Big),$$

te mnoge druge. □

[10] Npr. svako dijete možete varati pričama o postojanju Djeda Mraza, no to u načelu funkcionira samo određeno vrijeme, ako uopće.

[11] Npr. neka je (izuzetno nemoralna) osoba X cijeli svoj život u *part-time* vezi s dvije osobe, osobom Y i osobom Z, ali te osobe to ne znaju. Kad je X zajedno s Y, onda vara osobu Z izmišljajući da je negdje drugdje, a kada zajedno sa Z, onda na isti način vara osobu Y. Dakle, osoba X uspijeva stalno nekoga varati.

2.16. Sljedeće rečenice napišite kao formule predikatne logike:

(a) "Postoji student koji brblja na svakom predavanju."
(b) "Postoje nastavni materijali za svako predavanje."

■ ***Rješenje:***

(a) "Postoji student koji brblja na svakom predavanju."
Ova rečenica, unatoč tome što kombinira univerzalnu i egzistencijalnu kvantifikaciju, nije višeznačna (no rečenica "Neki student brblja na svakom predavanju" bi to bila). Označimo s '$S(x)$' "x je student", s 'P(x)' "x je predavanje" te s '$B(x, y)$' "x brblja na/tijekom y".

$$\exists x\Big(S(x) \land \forall y\big(P(y) \rightarrow B(x, y)\big)\Big).$$

(b) "Postoje nastavni materijali za svako predavanje."
Ova rečenica oblikom se čini identična prethodnoj, ali to nije. Označimo s '$M(x)$' "x je nastavni materijal", s 'P(x)' "x je predavanje" te s 'Z(x, y)' "x je namijenjen za y". Sljedeća formalizacija je pogrešna:

$$\exists x\Big(M(x) \land \forall y\big(P(y) \rightarrow Z(x, y)\big)\Big),$$

jer bi to značilo da se jedno te isti materijali koriste za svako predavanje.[12] Umjesto toga, rečenicu treba formalizirati ovako:

$$\forall y\Big(P(y) \rightarrow \exists x\big(M(x) \land Z(x, y)\big)\Big),$$

Zašto se ove formalizacije razlikuju? Razlog leži u odnosu između studenta i predavanja s jedne strane te nastavnog materijala i predavanja s druge strane. Jedan student može pohađati (i obično pohađa) više predavanja, dok jedan nastavni materijal ne možete koristiti za sva predavanja. Ovaj primjer ilustrira da je pri formalizaciji itekako potrebno uključiti pozadinsko znanje (zdrav razum) o naravi problema. □

2.17. Sljedeću rečenicu napišite kao formulu predikatne logike:

"Mušica Biba može izbjegavati sve žabe neko vrijeme, ali niti jedna mušica ne može izbjegavati sve žabe sve vrijeme."

■ ***Rješenje:***

Ova je rečenica analogna Lincolnovu iskazu iz zadatka 2.15, stoga i pati od iste vrste višeznačnosti: nije jasno može li Biba izbjegavati sve žabe istovremeno, no to uspijeva samo neko ograničeno vrijeme, ili pak može izbjegavati svaku žabu neko vrijeme, ali ne više žaba istovremeno. Drugo tumačenje mušici Bibi ne bi bilo odveć korisno,[13] stoga

[12] Priznat ćete ipak da je ideja privlačna.
[13] Za mušicu Bibu priča se tragično završava čim jednu žabu više ne može izbjegavati.

pretpostavimo da je prvo tumačenje ispravno. Označimo s ‘Z(x)’ “x je žaba”, s ‘M(x)’ “x je mušica” te s ‘$I(x, y, t)$’ “x može izbjegavati y u trenutku t”. Tada imamo:

$$\exists t \forall x \big(Z(x) \rightarrow I(Biba, x, t)\big) \land \neg \exists y \Big(M(y) \land \forall t \forall x \big(Z(x) \rightarrow I(y, x, t)\big)\Big).$$

I ovu je formulu moguće napisati u mnogo ekvivalentnih oblika. Dodatno, može se u formulu uvesti provjera da Biba doista jest mušica, premda to ovdje nije nužno (to je u rečenici tek usputna informacija). Također, uputno je provjeriti referencira li varijabla t doista vremenski trenutak (ili vremenski period), a ne neki drugi objekt domene (npr. mušicu Bibu). U tu svrhu možemo uvesti predikat $T(t)$, i formalizaciju proširiti na sljedeći način:

$$\begin{aligned}&\exists t \Big(T(t) \land \forall x \big(Z(x) \rightarrow I(Biba, x, t)\big)\Big) \land \\ &\neg \exists y \Big(M(y) \land \forall t \forall x \Big(\big(T(t) \land Z(x)\big) \rightarrow I(y, x, t)\Big)\Big).\end{aligned}$$

□

2.18. Sljedeće rečenicu napišite kao formule predikatne logike:

(a) “Svakog krasi neka vrlina.”
(b) “Postoji iznimka za svako pravilo.”
(c) “Na svakom predavanju postoji student koji se dosađuje.”
(d) “Svaki lonac ima poklopac.”
(e) “Svi koji vole Raymonda vole nekoga.”
(f) “Svi vole nekog tko nekoga voli.”
(g) “Svi vole svakog tko nekoga voli.”
(h) “Svaki grad ima gradonačelnika.”
(i) “Svaka zlatna ribica ispunjava neku želju, a neke želje ispunjavaju sve ribice.”

Ako je rečenica višeznačna, napišite sve moguće formalizacije.

2.4 Rezolucijsko zaključivanje

Pretvaranje formule predikatne logike u klauzalni oblik

1. *Uklanjanje ekvivalencije*
   - $F \leftrightarrow G \equiv (\neg F \lor G) \land (\neg G \lor F)$
2. *Uklanjanje implikacije*
   - $F \rightarrow G \equiv \neg F \lor G$
3. *Smanjivanje dosega operatora negacije* tako da se odnosi samo na jedan atom, koristeći pritom sljedeće ekvivalencije propozicijske (v. dodatak A) odnosno predikatne logike (v. dodatak B):

- $\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$
- $\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$
- $\neg\forall x F(x) \equiv \exists x \neg F(x)$
- $\neg\exists x F(x) \equiv \forall x \neg F(x)$

Kada se u nekom od prethodna tri koraka pojavi dvostruka negacija, ukloni je primjenom *involutivnosti*: $\neg\neg F \equiv F$

4. *Preimenovanje varijabli* na način da svaki kvantifikator vezuje jedinstvenu varijablu. Vrijednost istinitosti formule neće se mijenjati jer sâm naziv varijable nema utjecaja na istinitost formule. Formalno, preimenovanje varijabli temelji se na sljedećim ekvivalencijama predikatne logike (v. dodatak B):
   - $\forall x F(x) \vee \forall x G(x) \equiv \forall x F(x) \vee \forall y G(y)$
   - $\forall x F(x) \vee \exists x G(x) \equiv \forall x F(x) \vee \exists y G(y)$
   - $\exists x F(x) \vee \forall x G(x) \equiv \exists x F(x) \vee \forall y G(y)$
   - $\exists x F(x) \vee \exists x G(x) \equiv \exists x F(x) \vee \exists y G(y)$
   - $\forall x F(x) \wedge \forall x G(x) \equiv \forall x F(x) \wedge \forall y G(y)$
   - $\forall x F(x) \wedge \exists x G(x) \equiv \forall x F(x) \wedge \exists y G(y)$
   - $\exists x F(x) \wedge \forall x G(x) \equiv \exists x F(x) \wedge \forall y G(y)$
   - $\exists x F(x) \wedge \exists x G(x) \equiv \exists x F(x) \wedge \exists y G(y)$

5. *Skolemizacija*
   - Zamjena svih egzistencijalno kvantificiranih varijabli *Skolemovim izrazima*
     Primjer.
     $$\exists x \mathrm{SESTRA}(x, \mathrm{IVAN}) \xrightarrow{\text{Skolemizacija}} \mathrm{SESTRA}(\mathrm{ANA}, \mathrm{IVAN})$$
   - U složenijim izrazima u kojima vrijednost zamjene zavisi od ostalih varijabli u formuli, egzistencijalno kvantificirane varijable zamjenjuju se tzv. *Skolemovom funkcijom*
     Primjer.
     U formuli $\forall x \exists y \mathrm{MAJKA}(y, x)$ vrijednost od y zavisi od x.
     Skolemizacija daje $\mathrm{MAJKA}(f(\mathrm{Ivan}), \mathrm{Ivan})$, gdje je $f(x)$ Skolemova funkcija.
   - Argumenti Skolemove funkcije su one univerzalno kvantificirane varijable čiji doseg uključuje doseg egzistencijalno kvantificirane varijable koja se zamjenjuje
     Primjer.
     $\exists u \forall v \forall w \exists x \forall y \exists z F(u, v, w, x, y, z)$
     Uklanjaju se $\exists u$, $\exists x$, i $\exists z$ i zamjenjuju redom *Skolemovim izrazima*: $a, f(v, w), g(v, w, y)$, gdje su a, f, g Skolemove funkcije.
     $$\exists u \forall v \forall w \exists x \forall y \exists z F(u, v, w, x, y, z) \xrightarrow{\text{zamjena}} \forall v \forall w \forall y F(a, v, w, f(v, w), y, g(v, w, y))$$
     Napomena: Niti jedan od simbola a, f, g ne smije se pojavljivati u izvornoj formuli!

- Skolemizacija kao postupak ne daje nužno definiciju Skolemove funkcije nego se radi o metodi pridjeljivanja imena funkcijama koje moraju postojati
Primjer.

$$\forall x \exists y GT(y, x) \xrightarrow{\text{skolemizacija}} \forall x GT(f(x), x),$$

gdje je f Skolemova funkcija. Ona može biti $f(x) = x + 1$ ili $f(x) = x + 5$ itd. Ovo na prvi pogled može izgledati sumnjivo te se možemo zapitati što uopće opravdava ispravnost postupka Skolemizacije? Primjerice, Skolemizacijom formule $\exists x SESTRA(x, Ivan)$ možemo dobiti formulu $SESTRA(Ana, Ivan)$, premda je sasvim očito da općenito *ne* vrijedi:

$$\exists x SESTRA(x, Ivan) \equiv SESTRA(Ana, Ivan).$$

Razlog zbog kojeg to ipak smijemo napraviti te zbog kojeg je Skolemizacija ispravna jest taj što Skolemizacija ne utječe na svojstvo nezadovoljivosti formule. To znači da, ako je neka formula nezadovoljiva, onda će to biti i nakon Skolemizacije.[14] Tako, ako je formula $\exists x SESTRA(x, Ivan)$ neistinita, onda će sasvim sigurno biti neistinita i formula $SESTRA(Ana, Ivan)$. Za potrebe dokazivanja rezolucijom opovrgavanjem ovo je svojstvo sasvim dovoljno. Naime, ako su premise i negirani cilj proturječni, onda će takvima ostati i nakon Skolemizacije.

6. Premještanje svih kvantifikatora (preostali su samo univerzalni) na lijevu stranu formule tako da se na lijevoj strani nalazi niz kvantifikatora koji se nazivaju *prefiks*. Desna strana formule koja se naziva *matrica*, oslobođena je svih kvantifikatora. Međusobni uređaj kvantifikatora ostaje nepromijenjen. Formula u takvom obliku se naziva *preneksni normalni oblik*. Formalno, ovaj se korak temelji na sljedećim ekvivalencijama (v. dodatak B):

   - $\forall x F(x) \lor \forall y G(y) \equiv \forall x \forall y (F(x) \lor G(y))$
   - $\forall x F(x) \land \forall y G(y) \equiv \forall x \forall y (F(x) \land G(y))$
   - $\forall x F(x) \lor H\{x\} \equiv \forall x (F(x) \lor H\{x\})$
   - $\forall x F(x) \land H\{x\} \equiv \forall x (F(x) \land H\{x\})$

7. *Uklanjanje prefiksa* tako da ostane samo matrica. Podrazumijeva se da su sve varijable u formuli univerzalno kvantificirane (nema slobodnih varijabli u formuli).

8. Pretvaranje matrice u *konjunkciju klauzula* korištenjem distributivnosti (v. dodatak B):

   - $F \lor (G \land H) \equiv (F \lor G) \land (F \lor H)$
   - $(G \land H) \lor F \equiv (G \lor F) \land (H \lor F)$

9. Oblikovanje konjunkcije klauzula kao *skupa klauzula* brišući operatore konjunkcija. Implicitno se podrazumijeva konjunkcija između klauzula.

[14] Zainteresirani čitatelj dokaz ove tvrdnje može pronaći u [2].

10. *Standardizacija klauzula* preimenovanjem varijabli tako da ne postoje dvije klauzule koje sadrže identične varijable

    - Sve varijable u klauzulama su implicitno kvantificirane (korak 7) i postoji implicitna konjunkcija između klauzula (korak 9) pa je preimenovanje varijabli valjano i dopušteno jer se temelji na sljedećoj ekvivalenciji (v. dodatak B):

$$\forall x(F(x) \land G(x)) \equiv \forall x \forall y(F(x) \land G(y))$$

Rekurzivni algoritam za nalaženje najopćenitijeg unifikatora

Algoritam MGUNIFIER nalazi najopćenitiji unifikator dvaju izraza K_1 i K_2, prikazanih u obliku ugniježđene liste. Algoritam liste obrađuje rekurzivno nastojeći u svakoj iteraciji unificirati početne elemente listi (tzv. glave listi). Rezultirajuća supstitucija zatim se primjenjuje na ostatak obje liste (tzv. repovi listi). Postupak se rekurzivno ponavlja dok se obje liste ne isprazne (ili dok ne nastupi pogreška), pri čemu se u svakom koraku radi kompozicija dobivenih supstitucija.

2.19. Korištenjem algoritma MGUNIFER, unificirajte izraze $P(a)$ i $P(x)$, gdje je P predikat, a je konstanta, a x je varijabla.

Procedura MGUNIFIER(K_1, K_2)

```
ako K1 ili K2 simbolizira konstantu, varijablu, funkciju, predikat ili praznu listu onda
    ako K1 = K2 onda
        vrati praznu supstituciju {}

    ako K1 ili K2 je prazna lista onda
        vrati pogrešku

    ako K1 predstavlja varijablu onda
        ako se K1 pojavljuje u K2 onda
            vrati pogrešku
        inače
            vrati {K2/K1}

    ako K2 predstavlja varijablu onda
        ako se K2 pojavljuje u K1 onda
            vrati pogrešku
        inače
            vrati {K1/K2}

    ako niti K1 niti K2 ne predstavlja varijablu onda
        vrati pogrešku

inače
    α ← MGUNIFIER(glava od K1, glava od K2)
    ako α = pogreška onda
        vrati pogrešku

    K3 ← rezultat primjene supstitucije α na rep od K1
    K4 ← rezultat primjene supstitucije α na rep od K2
    β ← MGUNIFIER(K3, K4)
    ako β = pogreška onda
        vrati pogrešku

    vrati kompoziciju supstitucija {α ∘ β}
```

■ ***Rješenje:***

Zapišimo najprije zadane izraze u obliku liste (radi jednostavnosti):

$$P(a) = [P, a],$$

$$P(x) = [P, x].$$

Primijetimo dakle da je $K_1 = [P, a]$ i $K_2 = [P, x]$. Koraci algoritma:

1 *ako K_1 ili K_2 simbolizira konstantu, varijablu, funkciju ili predikat onda*
Kako ni K_1 ni K_2 ne zadovoljavaju ovaj uvjet, prelazimo na korak 19 algoritma.

19 $\alpha \leftarrow$ MGUNIFIER(glava od K_1, glava od K_2)
Algoritam se rekurzivno poziva s argumentima $K_1 = P$ i $K_2 = P$.

- **1** *ako K_1 ili K_2 simbolizira konstantu, varijablu, funkciju ili predikat onda*
  Ovaj put i K_1 i K_2 zadovoljavaju uvjet pa idemo na korak 2.
- **2** *ako $K_1 = K_2$ onda*
  Pošto je $P = P$, nema supstitucije i vraćamo prazan skup {}

α dakle postaje prazan skup {}

20 *ako α =* pogreška *onda*
α je prazna supstitucija, a ne pogreška, dakle idemo na korak 22.

22 $K_3 \leftarrow$ *rezultat primjene supstitucije α na rep od K_1*
Rep od $K_1 = [a]$, $\alpha = \{\}$. Kako je α prazan skup, $K_3 \leftarrow [a]$

23 $K_4 \leftarrow$ *rezultat primjene supstitucije α na rep od K_2*
Rep od $K_2 = [x]$, $\alpha = \{\}$. Kako je α prazan skup, $K_4 \leftarrow [x]$

24 $\beta \leftarrow$ MGUNIFIER(K_3, K_4)
Algoritam se rekurzivno poziva s parametrima $K_1 = K_3 = [a]$ i $K_2 = K_4 = [x]$

- **1** *ako K_1 ili K_2 simbolizira konstantu, varijablu, funkciju ili predikat onda*
  K_1 je konstanta, a K_2 je varijabla, dakle idemo na korak 2.
- **2** *ako $K_1 = K_2$ onda*
  Ovaj uvjet očito nije ispunjen, idemo na korak 6.
- **6** *ako K_1 predstavlja varijablu onda*
  $K_1 = [a]$, dakle K_1 je konstanta, idemo na korak 11.
- **11** *ako K_2 predstavlja varijablu onda*
  $K_2 = [x]$, dakle K_2 jest varijabla, idemo na korak 12.
- **12** *ako se K_2 pojavljuje u K_1 onda*
  uvjet nije ispunje, idemo na korak 15.
- **15** vraćamo supstituciju $\{a/x\}$.

Dakle, $\beta \leftarrow \{a/x\}$.

25 *ako β =* pogreška *onda*
β nije pogreška, idemo na korak 27.

27 Vraćamo kompoziciju $\alpha \circ \beta$, tj. $\{\} \circ \{a/x\} = \{a/x\}$. Dakle, $\{a/x\}$ je najveći zajednički unifikator izraza $P(a)$ i $P(x)$. □

2.20. Odredite najopćenitiji unifikator sljedećih parova atoma (a je konstanta, x, y, z, u i w su varijable, a f i g funkcijski simboli):

(a) $P(f(a), g(y), f(w))$ i $P(x, g(f(x)), y)$,
(b) $Q(x, g(y), z)$ i $Q(f(a), z, y)$.
(c) $P(a, x, f(g(y)))$ i $P(z, f(z), f(u))$

■ ***Rješenje:***

(a) Koraci pri unifikaciji izraza $K_1 = P(f(a), g(y), f(w))$ i $K_2 = P(x, g(f(x)), y)$ su sljedeći:
1. Supstitucija $\{f(a)/x\}$ unificira prve nepodudarne podizraze u K_1 i K_2:
   Kompozicija jest $\theta_1 = \varnothing \circ \{f(a)/x\} = \{f(a)/x\}$,
   $K_1\theta_1 = P(f(a), g(y), f(w))$,
   $K_2\theta_1 = P(f(a), g(f(f(a))), y)$.
2. Supstitucija $\{f(f(a))/y\}$ unificira sljedeće nepodudarne podizraze u $K_1\theta_1$ i $K_2\theta_1$:
   Kompozicija jest:
   $\theta_2 = \theta_1 \circ \{f(f(a))/y\} = \{f(a)/x\} \circ \{f(f(a))/y\} = \{f(a)/x, f(f(a))/y\}$,
   $K_1\theta_2 = P(f(a), g(f(f(a))), f(w))$,
   $K_2\theta_2 = P(f(a), g(f(f(a))), f(f(a)))$.
3. Supstitucija $\{f(a)/w\}$ unificira posljednje nepodudarne podizraze u $K_1\theta_2$ i $K_2\theta_2$:
   Kompozicija jest:
   $\theta_3 = \theta_2 \circ \{f(a)/w\} = \{f(a)/x, f(f(a))/y\} \circ \{f(a)/w\} =$
   $= \{f(a)/x, f(f(a))/y, f(a)/w\}$,
   $K_1\theta_3 = P(f(a), g(f(f(a))), f(f(a)))$,
   $K_2\theta_3 = P(f(a), g(f(f(a))), f(f(a)))$.

Najopćenitiji zajednički unifikator jest supstitucija $\theta_3 = \{f(a)/x, f(f(a))/y, f(a)/w\}$.

(b) Koraci pri unifikaciji izraza $K_1 = Q(x, g(y), z)$ i $K_2 = Q(f(a), z, y)$ su sljedeći:
1. Supstitucija $\{f(a)/x\}$ unificira prve nepodudarne podizraze u K_1 i K_2:
   Kompozicija jest $\theta_1 = \varnothing \circ \{f(a)/x\} = \{f(a)/x\}$,
   $K_1\theta_1 = Q(f(a), g(y), z)$,
   $K_2\theta_1 = Q(f(a), z, y)$.
2. Supstitucija $\{g(y)/z\}$ unificira sljedeće nepodudarne podizraze u $K_1\theta_1$ i $K_2\theta_1$:
   Kompozicija jest:
   $\theta_2 = \theta_1 \circ \{g(y)/z\} = \{f(a)/x\} \circ \{g(y)/z\} = \{f(a)/x, g(y)/z\}$,
   $K_1\theta_2 = P(f(a), g(y), g(y))$,
   $K_2\theta_2 = P(f(a), g(y), y)$.
3. Sljedeći nepodudarni izrazi su $g(y)$ i y.
   Zato što $g(y)$ sadržava y kao podizraz, ta dva izraza ne mogu se unificirati.
   Algoritam dojavljuje pogrešku.

Najopćenitiji zajednički unifikator ne postoji; izraze nije moguće unificirati.

(c) Koraci pri unifikaciji izraza $K_1 = P(a, x, f(g(y)))$ i $K_2 = P(z, f(z), f(u))$ su sljedeći:
1. Supstitucija $\{a/z\}$ unificira prve nepodudarne podizraze u K_1 i K_2:
   Kompozicija jest $\theta_1 = \varnothing \circ \{a/z\} = \{a/z\}$,
   $K_1\theta_1 = P(a, x, f(g(y)))$,
   $K_2\theta_1 = P(a, f(a), f(u))$.
2. Supstitucija $\{f(a)/x\}$ unificira sljedeće nepodudarne podizraze u $K_1\theta_1$ i $K_2\theta_1$:
   Kompozicija jest:
   $\theta_2 = \theta_1 \circ \{f(a)/x\} = \{a/z\} \circ \{f(a)/x\} = \{a/z, f(a)/x\}$,
   $K_1\theta_2 = P(a, f(a), f(g(y)))$,
   $K_2\theta_2 = P(a, f(a), f(u))$.
3. Supstitucija $\{g(y)/u\}$ unificira posljednje nepodudarne podizraze u $K_1\theta_2$ i $K_2\theta_2$:
   Kompozicija jest:
   $\theta_3 = \theta_2 \circ \{g(y)/u\} = \{a/z, f(a)/x\} \circ \{g(y)/u\} = \{a/z, f(a)/x, g(y)/u\}$,
   $K_1\theta_3 = P(a, f(a), f(g(y)))$,
   $K_2\theta_3 = P(a, f(a), f(g(y)))$.

Najopćenitiji zajednički unifikator jest supstitucija $\theta_3 = \{a/z, f(a)/x, g(y)/u\}$.

□

2.21. Odredite najopćenitiji unifikator sljedećih parova atoma (a je konstanta, x, y, z, u i w su varijable, a f, g i h funkcijski simboli):

(a) $Q(a, b)$ i $Q(x, x)$

(b) $P(a, x)$ i $P(f(w), b)$

(c) $Q(f(a), g(x))$ i $Q(y, y)$,

(d) $P(a, x, f(g(y)))$ i $P(z, f(z), f(u))$,

(e) $P(a, f(x), x)$ i $P(y, z, g(z))$

(f) $P(f(x), g(a), h(g(y), z))$ i $P(f(g(y)), y, h(x, a))$

2.22. Objasnite što je to *standardizacija*? Na kojoj se ekvivalenciji temelji? Opišite i primjerom ilustrirajte što se može dogoditi u postupku zaključivanja ako standardizaciju *ne* provedemo.

■ ***Rješenje:***

Standardizacija je postupak *preimenovanja* istoimenih varijabli koje se javljaju u različitim klauzulama, proveden tako da nakon preimenovanja ne postoje dvije klauzule koje sadrže istoimene varijable. Standardizacija se temelji na ekvivalenciji [21] iz dodatka B):

$$\forall x(F[x] \wedge G[x]) \equiv \forall x \forall y(F[x] \wedge G[y]),$$

gdje su $F[x]$ i $G[x]$ formule predikatne logike koje sadržavaju (u svim pojavljivanjima još nevezane) varijable x odnosno y.

Ako standardizaciju ne provodimo, u krajnjem slučaju može se dogoditi da *unifikacija* dvaju izraza ne uspije, premda bi uspjela uz odgovarajuća preimenovanja varijabli. S obzirom da se postupci zaključivanja u predikatnoj logici temelje na unifikaciji (njome se pronalazi supstitucija kojom se, uporabom pravila univerzalne specijalizacije, dobiva temeljna klauzula), to znači da neće biti moguće izvesti sve logičke posljedice. Odnosno, ako standardizaciju ne provodimo, prethodno *potpun* skup pravila gubi to svojstvo. U nešto povoljnijem slučaju, neprovođenje standardizacije imat će za posljedicu *gubitak općenitosti zaključka*, a to u konačnici opet može dovesti do nepotpunosti.

Primjer 1. Neprovođenje standardizacije može dovesti do gubitka općenitosti zaključka. Prema rezolucijskom pravilu vrijedi sljedeća relacija:

$$P(John) \vee R(x), \neg P(x) \vee S(x) \;\vdash\; R(John) \vee S(John),$$

No, uz standardizaciju (npr. preimenovanje varijable x u varijablu y u drugoj premisi) dobivamo općenitiji zaključak:

$$P(John) \vee R(x), \neg P(y) \vee S(y) \;\vdash\; R(x) \vee S(John).$$

Standardizaciju smo spominjali u opisu postupka pretvorbe formula predikatne logike u *skup klauzula*. Međutim, standardizacija se u predikatnoj logici provodi i onda kada se primjenjuju druga pravila zaključivanja, tj. uvijek kada se supstitucija izračunava unifikacijskim algoritmom.

Primjer 2. Nepotpunost prirodnih pravila zaključivanja (konkretno *modus ponensa*) u slučaju ne provođenja standardizacije možemo pokazati izvođenjem zaključka iz sljedećih premisa:[15]

$$\begin{array}{ll} (1) & \forall x\, KNOWS(x, Elizabeth) \\ (2) & \forall x\Big(KNOWS(John, x) \rightarrow HATES(John, x)\Big) \end{array}$$

uporabom pravila univerzalne specijalizacije uz supstituciju $\{John/x\}$ u formuli (1) i $\{Elizabeth/x\}$ u formuli (2), pomoću modus ponensa može se zaključiti:

$$HATES(John, Elizabeth).$$

Međutim, tu supstituciju nije moguće dobiti algoritmom MGUNIFIER, odnosno:

$$\text{MGUNIFIER}([KNOWS, x, Elizabeth], [KNOWS, John, x])$$

vraća pogrešku. Unifikacija ne uspijeva jer varijable u formulama (1) i (2) nisu standardizirane, pa tako ispada da bi objekt koji denotira varijabla x trebao biti istovremeno John i Elizabetha. Standardizacijom (preimenovanjem varijable x u npr. formuli (1)) dobivamo:

$$\begin{array}{ll} (1) & \forall y\; KNOWS(y, Elizabeth) \\ (2) & \forall x(KNOWS(John, x) \rightarrow HATES(John, x) \end{array}$$

[15] Primjer je preuzet iz [5].

Sada dobivamo:

$$\text{MGUNIFIER}([KNOWS, y, Elizabeth], [KNOWS, John, x]) = \{John/y, Elizabeth/x\},$$

a to je supstitucija koja nam omogućava izvođenje (očekivanog) zaključka primjenom modusa ponensa. □

2.23. Pretvorite formulu

$$\neg\exists x \forall y\Big(\big(P(y) \lor Q(x,y)\big) \to \forall z\big(R(z) \to Q(y,x)\big)\Big)$$

u standardizirani skup klauzula, navedeći sustavno sve korake u toj pretvorbi. Kako glasi odgovarajući standardizirani skup klauzula? Zbog čega je takav oblik od posebnog značaja?

■ ***Rješenje:***

Pretvorba formule u standardni Skolemov oblik provodi se na sljedeći način (u uglatim zagradama navedeni su brojevi ekvivalencija iz popisa ekvivalencija propozicijske logike, a u vitičastim zagradama ekvivalencije iz popisa ekvivalencija predikatne logike):

$$\begin{aligned}
\text{uklanjanje implikacije:}\quad & \neg\exists x \forall y\Big(\big(P(y) \lor Q(x,y)\big) \to \forall z\big(R(z) \to Q(y,x)\big)\Big) \equiv^{2\times[2]} \\
\text{potiskivanje negacije:}\quad & \neg\exists x \forall y\Big(\neg\big(P(y) \lor Q(x,y)\big) \lor \forall z\big(\neg R(z) \lor Q(y,x)\big)\Big) \equiv^{\{4,3\}} \\
& \forall x \exists y \neg\Big(\neg\big(P(y) \lor Q(x,y)\big) \lor \forall z\big(\neg R(z) \lor Q(y,x)\big)\Big) \equiv^{[23]} \\
& \forall x \exists y\Big(\neg\neg\big(P(y) \lor Q(x,y)\big) \land \neg\forall z\big(\neg R(z) \lor Q(y,x)\big)\Big) \equiv^{[1]} \\
& \forall x \exists y\Big(\big(P(y) \lor Q(x,y)\big) \land \neg\forall z\big(\neg R(z) \lor Q(y,x)\big)\Big) \equiv^{\{3\}} \\
& \forall x \exists y\Big(\big(P(y) \lor Q(x,y)\big) \land \exists z\neg\big(\neg R(z) \lor Q(y,x)\big)\Big) \equiv^{[24]} \\
& \forall x \exists y\Big(\big(P(y) \lor Q(x,y)\big) \land \exists z\big(\neg\neg R(z) \land \neg Q(y,x)\big)\Big) \equiv^{[1]} \\
& \forall x \exists y\Big(\big(P(y) \lor Q(x,y)\big) \land \exists z\big(R(z) \land \neg Q(y,x)\big)\Big) \equiv^{\{18\}} \\
& \forall x \exists y \exists z\Big(\big(P(y) \lor Q(x,y)\big) \land \big(R(z) \land \neg Q(y,x)\big)\Big) \\
\text{skolemizacija:}\quad & \forall x\Big(\big(P(f(x)) \lor Q(x,f(x))\big) \land \big(R(g(x)) \land \neg Q(f(x),x)\big)\Big) \\
\text{uklanjanje prefiksa:}\quad & \big(P(f(x)) \lor Q(x,f(x))\big) \land \big(R(g(x)) \land \neg Q(f(x),x)\big) \\
\text{asocijativnost '}\land\text{'}\quad & \big(P(f(x)) \lor Q(x,f(x))\big) \land R(g(x)) \land \neg Q(f(x),x) \\
\text{standardizacija:}\quad & \big(P(f(x)) \lor Q(x,f(x))\big) \land R(g(y)) \land \neg Q(f(z),z)
\end{aligned}$$

Standardizirani skup klauzula je $\big\{P(f(x)) \lor Q(x,f(x)),\ R(g(y)),\ \neg Q(f(z),z)\big\}$, ili bilo koja sintaktička varijanta ovog skupa.

Ovakav oblik od posebnog je značaja jer predstavlja ulaz u rezolucijski postupak dokazivanja, a taj je postupak pogodan za automatizaciju na računalu. □

2.24. Sljedeće formule prevedite u standardizirani klauzalni oblik, navodeći sve korake pri toj pretvorbi:

(a) $\neg\exists x\forall y\Big(\big(P(y)\ \lor\ \forall z Q(x,y,z)\big) \to \forall z\big(R(z) \to Q(y,x)\big)\Big)$

(b) $\forall x\forall y(\exists z P(x,z) \land P(y,z)) \to \exists u Q(x,y,u)\big)$

(c) $\forall x\,\exists w\,\forall y\,\big((\exists z\,P(x,z) \land P(y,w)) \to \exists z\,Q(x,y,z)\big)$

2.25. Koristeći rezoluciju opovrgavanjem dokažite:

$$\forall x\big(\exists y(S(x,y) \land M(y)) \to \exists y(I(y) \land E(x,y))\big)\ \vdash\ \neg\exists x I(x) \to \forall x\forall y\big(S(x,y) \to \neg M(y)\big).$$

■ ***Rješenje:***

Prije rezolucije opovrgavanjem, premise i negaciju cilja potrebno je pretvoriti u standardizirani klauzalni oblik. Iz premise dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\forall x\big(\exists y(S(x,y) \land M(y)) \to \exists y(I(y) \land E(x,y))\big) \equiv\\
&\forall x\big(\neg\exists y(S(x,y) \land M(y)) \lor \exists y(I(y) \land E(x,y))\big) \equiv\\
&\forall x\big(\forall y\neg(S(x,y) \land M(y)) \lor \exists y(I(y) \land E(x,y))\big) \equiv\\
&\forall x\big(\forall y(\neg S(x,y) \lor \neg M(y)) \lor \exists y(I(y) \land E(x,y))\big) \equiv\\
&\forall x\big(\forall y(\neg S(x,y) \lor \neg M(y)) \lor \exists z(I(z) \land E(x,z))\big) \equiv\\
&\forall x\exists z\forall y\big((\neg S(x,y) \lor \neg M(y)) \lor (I(z) \land E(x,z))\big) \equiv\\
&\forall x\exists z\forall y\big(\neg S(x,y) \lor \neg M(y) \lor I(z) \land (\neg S(x,y) \lor \neg M(y) \lor E(x,z))\big)
\end{aligned}$$

Skolemizacijom i standardizacijom dobivamo klauzule:

$$\begin{aligned}
&(1)\quad \neg S(x,y)\ \lor\ \neg M(y)\ \lor\ I(f(x))\\
&(2)\quad \neg S(x',y')\ \lor\ \neg M(y')\ \lor\ E(x',f(x'))
\end{aligned}$$

Iz negacije zaključka dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\neg\big(\neg\exists x I(x) \to \forall x\forall y(S(x,y) \to \neg M(y))\big) \equiv\\
&\neg\big(\neg\neg\exists x I(x) \lor \forall x\forall y(S(x,y) \to \neg M(y))\big) \equiv\\
&\neg\big(\exists x I(x) \lor \forall x\forall y(S(x,y) \to \neg M(y))\big) \equiv\\
&\neg\big(\exists x I(x) \lor \forall x\forall y(\neg S(x,y) \lor \neg M(y))\big) \equiv\\
&\neg\exists x I(x) \land \neg\forall x\forall y(\neg S(x,y) \lor \neg M(y)) \equiv\\
&\forall x\neg I(x) \land \exists x\exists y\neg(\neg S(x,y) \lor \neg M(y)) \equiv\\
&\forall x\neg I(x) \land \exists x\exists y(\neg\neg S(x,y) \land \neg\neg M(y)) \equiv\\
&\forall x\neg I(x) \land \exists x\exists y(S(x,y) \land M(y)) \equiv
\end{aligned}$$

Skolemizacijom i standardizacijom dobivamo:

$$\begin{aligned}
&(3)\quad \neg I(x'')\\
&(4)\quad S(a,b)\\
&(5)\quad M(b)
\end{aligned}$$

Sâm rezolucijski postupak vrlo je jednostavan:

$$
\begin{array}{lll}
(6) & \neg S(x,y) \vee \neg M(y) & (\text{iz 1 i 3 uz } \theta = \{f(x)/x''\}) \\
(7) & \neg M(b) & (\text{iz 4 i 6 uz } \theta = \{a/x, b/y\}) \\
(8) & \mathsf{nil} & (\text{iz 5 i 7 uz } \theta = \varnothing)
\end{array}
$$

□

2.26. Koristeći rezoluciju opovrgavanjem dokažite:

$$
\begin{array}{ll}
\forall x\Big((E(x) \wedge \neg V(x)) \rightarrow \exists y(S(x,y) \wedge C(y))\Big), & \\
\exists x\Big(P(x) \wedge E(x) \wedge \forall y(S(x,y) \rightarrow P(y))\Big), & \\
\forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x)) & \vdash \exists x(P(x) \wedge C(x)) \ .
\end{array}
$$

2.27. Rezolucijom opovrgavanjem dokažite:

"Postoji netko koga svako voli. Dakle, svatko nekoga voli."

■ ***Rješenje:***

Neka '$V(x,y)$' označava da "x voli y". Premisu i cilj formaliziramo ovako:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \exists y \forall x V(x,y) \\
(2) & \forall x \exists y V(x,y)
\end{array}
$$

Prva rečenica nije višeznačna, međutim druga jest (v. diskusiju na str. 34): ili "postoji netko koga svatko voli", ili "svatko voli neku, ovu ili onu osobu". Ovdje je, međutim, iz konteksta očito da je ciljano značenje ovo drugo, u protivnom je druga rečenica samo refraziranje prve, pa iz nje slijedi trivijalno.

Negacijom cilja, pretvorbom u standardizirani klauzalni oblik, te primjenom rezoucijskog pravila dobivamo:

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \exists y \forall x V(x,y) & \\
(2) & \exists x \forall y \neg V(x,y) & \\
\hline
(1) & V(x,a) & \\
(2) & \neg V(b,y) & \\
\hline
 & \mathsf{nil} & (\text{iz 1 i 2 uz } \theta = \{b/x, a/y\})
\end{array}
$$

□

2.28. Rezolucijom opovrgavanjem dokažite:

"Cijeli svijet ljubi ljubavnika.[16] Netko ljubi nekoga. Dakle, svatko ljubi svakoga."

[16] *"All mankind love a lover"*, Ralf Waldo Emerson: *Essays: First Series*, *Love*, 1841.

Uputa: Ljubavnika definirajte kao "nekoga tko nekoga ljubi". U skladu s time, prvu premisu formalizirajte kao "Svi ljube svakog tko nekoga ljubi".

■ ***Rješenje:***

Ovaj se argument na prvi pogled doima pogrešnim: čini se kao da je zaključak suviše općenit i da ne može biti logička posljedica premisa. Međutim, pažljivije razmatranje otkriva da je zaključak sasvim sigurno logička posljedica premisa. Neformalno možemo rasuđivati ovako: ako neka osoba ljubi nekoga (druga premisa), onda znači da je ta osoba ljubavnik (po definiciji ljubavnika kao nekoga tko nekoga ljubi). S obzirom da je taj netko ljubavnik, onda ga svi (cijeli svijet) ljubi (prva premisa). No, to odmah znači da su i svi drugi ljubavnici, jer ljube onoga prvog. Konačno, ako su baš svi ljubavnici, onda svaki od njih mora ljubiti sve druge.

Rezolucija opovrgavanjem dat će formalnu potvrdu ovog argumenta. Najprije je rečenice prirodnog jezika potrebno formalizirati. Uzmimo da '$L(x,y)$' označava "x ljubi y":

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \forall y\Big(\exists z L(y,z) \rightarrow \forall x L(x,y)\Big) & \\
(2) & \exists x \exists y L(x,y) & \\
(3) & \neg\forall x \forall y L(x,y) & \text{(negacija cilja)}
\end{array}
$$

Formalizacija ovdje nije problematična jer su sve tri rečenice jednoznačne. Prva rečenica može se pročitati kao "za svakoga tko nekoga ljubi vrijedi da ga svi ljube", i može se napisati u raznim ekvivalentnim oblicima. Premise i negaciju cilja potrebno je zatim pretvoriti u standardni Skolemov oblik:

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \forall y\Big(\neg\exists z L(y,z) \lor \forall x L(x,y)\Big) \equiv & \\
 & \forall y\Big(\forall z \neg L(y,z) \lor \forall x L(x,y)\Big) \equiv & \\
 & \forall y \forall z \forall x\Big(\neg L(y,z) \lor L(x,y)\Big) & \\
 & \neg L(y,z) \lor L(x,y) & \text{(uklanjanjem prefiksa)} \\
(2) & \exists x \exists y L(x,y) & \\
 & L(a,b) & \text{(skolemizacijom; } a \text{ i } b \text{ su Skolemove konstante)} \\
(3) & \neg\forall x \forall y L(x,y) \equiv \exists x \exists y \neg L(x,y) & \\
 & \neg L(c,d) & \text{(skolemizacijom; } c \text{ i } d \text{ su Skolemove konstante)}
\end{array}
$$

Ovdje treba biti oprezan da se u klauzulama (2) i (3) ne izaberu identične Skolemove konstante (svaka od tih konstanti predstavlja univerzalno kvantificiranu varijablu koja ne mora biti identična drugim varijablama). Rezolucijski postupak je sljedeći:

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \neg L(y,z) \lor L(x,y) & \\
(2) & L(a,b) & \\
(3) & \neg L(c,d) & \\
\hline
(4) & L(x,a) & (\text{iz } 1, 2 \text{ uz } \theta = \{a/y, b/z\}) \\
(5) & \neg L(d,z) & (\text{iz } 1, 3 \text{ uz } \theta = \{c/x, d/y\}) \\
(6) & \mathsf{nil} & (\text{iz } 4, 5 \text{ uz } \theta = \{d/x, a/z\})
\end{array}
$$

□

2.29. Zadane su sljedeće premise:

> "Što god čovjek radio, netko to radi bolje od njega, ili taj čovjek voli to što radi. Nitko ne radi štrudle bolje od moje mame, niti ih ona voli raditi."

Rezolucijom opovrgavanjem dokažite "Moja mama ne radi štrudle".

■ ***Rješenje:***

Formalizacija ovih rečenica ostavlja stanovitu slobodu u interpretaciji. Uzmimo da '$R(x, y)$' označava "x radi y", '$B(x, y, z)$' označava "x radi y bolje od z te '$V(x, y)$' označava "x voli raditi y". Neka konstanta 'm' označava majku, a 's' štrudlu. Jedno jednostavno rješenje, u skladu sa zadatkom, je sljedeće:

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \forall x \forall y \Big(R(x, y) \rightarrow \big(\exists z B(z, y, x) \vee V(x, y) \big) \Big) & \\
(2) & \neg \exists z \, B(z, s, m) \wedge \neg V(m, s) & \\
(3) & \neg\neg R(m, s) & \text{(negacija cilja)}
\end{array}
$$

Prva rečenica je osobito problematična jer se zamjenica "taj" može odnositi na čovjeka kojem u formuli (1) odgovara varijabla x, ali i na čovjeka kojem u formuli (1) odgovara varijabla z.[17] Ovdje je željena interpretacija bila ova prva: "taj" se odnosi na imenicu "čovjek" iz prvog dijela rečenice. (Primijetite da smo činjenicu da je x čovjek ignorirali; doista, ta činenica nije potrebna za dokaz jer se pojavljuje u drugoj premisi niti u zaključku.) Drugi problem s istom rečenicom jest interpretacija veznika "ili", koja u prirodnom jeziku može biti isključiva ili uključiva. Ovdje je željena interpretacija bila ova druga. (Kada se želi iskazati isključivost, obično kažemo "ili ... ili ... "). Uz drugačiju interpretaciju prve rečenice neće biti moguće izvesti zadani cilj. U drugoj rečenici potrebno je obratiti pozornost na činjenicu da dvostruka negacija u hrvatskome jeziku odgovara jednostrukoj negaciji u logici, pa drugu rečenicu formaliziramo kao '$\neg \exists z \, B(z, s, m)$', a ne kao '$\neg \exists z \, \neg B(z, s, m)$'. Konačno, veznik "niti" odgovara u logici negaciji operatora '$\wedge$'.

Prije rezolucije opovrgavanjem, premise i negaciju cilja potrebno je pretvoriti u stan-

[17] U lingvistici se takvo referenciranje naziva *anafora*, a ovakav problem *razrješavanje anafore* (eng. anaphora resolution).

dardizirani klauzalni oblik:

(1)	$\forall x \forall y \Big(R(x,y) \rightarrow \big(\exists z B(z,y,x) \vee V(x,y) \big) \Big)$	
	$\forall x \forall y \Big(\neg R(x,y) \vee \big(B(z,y,x) \vee V(x,y) \big) \Big)$	(prema [2])
	$\forall x \forall y \Big(\neg R(x,y) \vee \big(B(f(x,y),y,x) \vee V(x,y) \big) \Big)$	(Skolemizacija varijable z)
	$\neg R(x,y) \vee \big(B(f(x,y),y,x) \vee V(x,y) \big)$	(uklanjanje prefiksa)
	$\neg R(x,y) \vee B(f(x,y),y,x) \vee V(x,y)$	(prema [18])
(2)	$\neg \exists z\, B(z,s,m) \wedge \neg V(m,s)$	
	$\forall z \neg B(z,s,m) \wedge \neg V(m,s)$	(prema [4] iz pred. log.)
	$\neg B(z,s,m) \wedge \neg V(m,s)$	(uklanjanje prefiksa)
(3)	$\neg\neg R(m,s)$	(negacija cilja)
	$R(m,s)$	(prema [1])

Formula (2) daje dvije klauzule, pa dakle ukupno imamo četiri klauzule kao premise. Rezolucijski postupak je sljedeći:

(1)	$\neg R(x,y) \vee B(f(x,y),y,x) \vee V(x,y)$	
(2)	$\neg B(z,s,m)$	
(3)	$\neg V(m,s)$	
(4)	$R(m,s)$	
(5)	$B(f(m,s),s,m) \vee V(m,s)$	(iz 1,4 uz $\delta = \{m/x, s/y\}$)
(6)	$B(f(m,s),s,m)$	(iz 5,3 uz $\delta = \emptyset$)
(7)	nil	(iz 6,2 uz $\delta = \{f(m,s)/z\}$)

□

2.30. Rezolucijom opovrgavanjem dokažite:

"Studenti su građani. Dakle, svi studentski glasovi su građanski glasovi."

Neka pritom '$S(x)$' označava "x je student", '$C(X)$' neka označava "x je građanin", a '$V(x,y)$' neka označava "x je glas od y".

2.31. Zadane su sljedeće premise:

"Carinici su pregledali svakoga tko je ušao u zemlju a nije diplomat. Neke krijumčare koji su ušli su u zemlju pretražili su samo krijumčari. Niti jedan krijumčar nije diplomat."

Rezolucijom opovrgavanjem dokažite: "Neki su carinici krijumčari". Neka pritom '$U(x)$' znači "x je ušao u zemlju", '$P(x,y)$' neka znači "x je pregledao y" te neka '$D(x)$', '$C(x)$' i '$K(x)$' znače da je x diplomat, carinik, odnosno krijumčar.

2.32. Zadane su sljedeće premise:

> "Ljudi koji su pametni i nisu siromašni su sretni. Pismeni ljudi su pametni. Marina je pismena i bogata. Bogati ljudi nisu siromašni. Sretni ljudi žive uzbudljiv život."

Rezolucijom opovrgavanjen provjerite postoji li itko tko vodi uzbudljiv život.

2.33. U programskom jeziku Prolog sve su varijable u stavku implicitno univerzalno kvantificirane. Međutim, za varijablu koja se ne pojavljuje u glavi stavka također možemo reći da je egzistencijalno kvantificirana u tijelu stavka. Korištenjem ekvivalencija predikatne logike, na primjeru stavka

```
hasChild(x) :- parent(x,y)
```

dokažite da su navedena dva tumačenja ekvivalentna, tj. da varijabla `y` može biti univerzalno kvantificirana ako je doseg kvantifikatora cijela formula, a egzistencijalno ako je u dosegu kvantifikatora samo antecedens implikacije.

Dodatak A – Tablica ekvivalencija propozicijske logike

[1]	$\neg\neg F$	$\equiv$	F	– involucija
[2]	$F \rightarrow G$	$\equiv$	$\neg F \vee G$	– uklanjanje implikacije
[3]	$F \rightarrow G$	$\equiv$	$\neg G \rightarrow \neg F$	– kontrapozicija
[4]	$F \rightarrow (G \rightarrow H)$	$\equiv$	$G \rightarrow (F \rightarrow H)$	
[5]	$F \rightarrow (G \rightarrow H)$	$\equiv$	$(F \wedge G) \rightarrow H$	
[6]	$F \leftrightarrow G$	$\equiv$	$(F \wedge G) \vee (\neg F \wedge \neg G)$	
[7]	$F \leftrightarrow G$	$\equiv$	$(F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$	
[8]	$F \leftrightarrow G$	$\equiv$	$(\neg F \vee G) \wedge (\neg G \vee F)$	– idempotencija
[9]	$G \wedge G$	$\equiv$	G	
[10]	$G \wedge \mathit{True}$	$\equiv$	G	
[11]	$G \wedge \mathit{False}$	$\equiv$	False	
[12]	$G \wedge \neg G$	$\equiv$	False	– zakon kontradikcije (ekskluzija)
[13]	$G \vee G$	$\equiv$	G	– faktorizacija
[14]	$G \vee \mathit{True}$	$\equiv$	True	
[15]	$G \vee \mathit{False}$	$\equiv$	G	
[16]	$G \vee \neg G$	$\equiv$	True	– zakon isključenja trećega
[17]	$(F \wedge G) \wedge H$	$\equiv$	$F \wedge (G \wedge H)$	asocijativnost
[18]	$(F \vee G) \vee H$	$\equiv$	$F \vee (G \vee H)$	
[19]	$F \wedge G$	$\equiv$	$G \wedge F$	komutativnost
[20]	$F \vee G$	$\equiv$	$G \vee F$	
[21]	$F \vee (G \wedge H)$	$\equiv$	$(F \vee G) \wedge (F \vee H)$	distributivnost
[22]	$F \wedge (G \vee H)$	$\equiv$	$(F \wedge G) \vee (F \wedge H)$	
[23]	$\neg(F \vee G)$	$\equiv$	$\neg F \wedge \neg G$	de Morganovi zakoni
[24]	$\neg(F \wedge G)$	$\equiv$	$\neg F \vee \neg G$	
[25]	$F \vee (F \wedge G)$	$\equiv$	F	
[26]	$F \wedge (F \vee G)$	$\equiv$	F	apsorpcija
[27]	$F \vee (\neg F \wedge G)$	$\equiv$	$F \vee G$	
[28]	$F \wedge (\neg F \vee G)$	$\equiv$	$F \wedge G$	

Dodatak B – Tablica ekvivalencija predikatne logike

Neka $F[x]$ i $G[x]$ označavaju formule koje sadrže (u svim pojavljivanjima slobodnu) varijablu x, dok $H\{x\}$ označava formulu koja ne sadrži varijablu x.

[1]	$\forall x F[x]$	$\equiv$	$\forall y F[y]$
[2]	$\exists x F[x]$	$\equiv$	$\exists y F[y]$
[3]	$\neg\forall x F[x]$	$\equiv$	$\exists x \neg F[x]$
[4]	$\neg\exists x F[x]$	$\equiv$	$\forall x \neg F[x]$
[5]	$\forall x F[x] \vee \forall x G[x]$	$\equiv$	$\forall x F[x] \vee \forall y G[y]$
[6]	$\forall x F[x] \vee \exists x G[x]$	$\equiv$	$\forall x F[x] \vee \exists y G[y]$
[7]	$\exists x F[x] \vee \forall x G[x]$	$\equiv$	$\exists x F[x] \vee \forall y G[y]$
[8]	$\exists x F[x] \vee \exists x G[x]$	$\equiv$	$\exists x F[x] \vee \exists y G[y]$
[9]	$\forall x F[x] \wedge \forall x G[x]$	$\equiv$	$\forall x F[x] \wedge \forall y G[y]$
[10]	$\forall x F[x] \wedge \exists x G[x]$	$\equiv$	$\forall x F[x] \wedge \exists y G[y]$
[11]	$\exists x F[x] \wedge \forall x G[x]$	$\equiv$	$\exists x F[x] \wedge \forall y G[y]$
[12]	$\exists x F[x] \wedge \exists x G[x]$	$\equiv$	$\exists x F[x] \wedge \exists y G[y]$
[13]	$\forall x F[x] \vee \forall y G[y]$	$\equiv$	$\forall x \forall y (F[x] \vee G[y])$
[14]	$\forall x F[x] \wedge \forall y G[y]$	$\equiv$	$\forall x \forall y (F[x] \wedge G[y])$
[15]	$\forall x F[x] \vee H\{x\}$	$\equiv$	$\forall x (F[x] \vee H\{x\})$
[16]	$\forall x F[x] \wedge H\{x\}$	$\equiv$	$\forall x (F[x] \wedge H\{x\})$
[17]	$\exists x F[x] \vee H\{x\}$	$\equiv$	$\exists x (F[x] \vee H\{x\})$
[18]	$\exists x F[x] \wedge H\{x\}$	$\equiv$	$\exists x (F[x] \wedge H\{x\})$
[19]	$\forall x (F[x] \wedge G[x])$	$\equiv$	$\forall x F[x] \wedge \forall x G[x]$
[20]	$\forall x (F[x] \wedge G[x])$	$\equiv$	$\forall x F[x] \wedge \forall y G[y]$
[21]	$\forall x (F[x] \wedge G[x])$	$\equiv$	$\forall x \forall y (F[x] \wedge G[y])$
[22]	$\exists x (F[x] \vee G[x])$	$\equiv$	$\exists x F[x] \vee \exists x G[x]$
[23]	$\exists x (F[x] \vee G[x])$	$\equiv$	$\exists x F[x] \vee \exists y G[y]$
[24]	$\exists x (F[x] \vee G[x])$	$\equiv$	$\exists x \exists y (F[x] \vee G[y])$

Dodatak C – Pregled nekih pravila prirodnog zaključivanja

Neka F, G i H predstavljaju bilo koju formulu u propozicijskoj ili predikatnoj logici.

[1]	Ako F i G tada $(F \wedge G)$	uvođenje konjunkcije
[2]	Ako $(F \wedge G)$ tada F	uklanjanje konjunkcije
[3]	Ako $(F \wedge G)$ tada G	
[4]	Ako F tada $(F \vee G)$	uvođenje disjunkcije
[5]	Ako G tada $(F \vee G)$	
[6]	Ako F i $(F \rightarrow G)$ tada G	modus ponens (uklanjanje implikacije)
[7]	Ako $\neg G$ i $(F \rightarrow G)$ tada $\neg F$	modus tollens
[8]	Ako $(F \rightarrow G)$ i $(G \rightarrow H)$ tada $(F \rightarrow H)$	ulančavanje (silogizam)

Literatura

[1] Leigh S. Cauman. *First-Order Logic: An Introduction*. Walter de Gruyter, 1998.

[2] Chin-Liang Chang and Richard Char-Tung Lee. *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving*. Academic Press, Inc. Orlando, FL, USA, 1997.

[3] Graeme Forbes. *Modern logic: A text in elementary symbolic logic*. Oxford University Press, 1994.

[4] John Nolt, Dennis A. Rohatyn, and Achille C. Varzi. *Schaum's outline of theory and problems of logic*. New York: McGraw-Hill, 1998.

[5] Stuart Russell and Peter Norvig. *Artificial intelligence: A modern approach*. Prentice-Hall, 1995.

[6] Rajjan Shinghal. *Formal Concepts in Artificial Intelligence Foundations*. Chapman & Hall, Ltd. London, UK, UK, 1991.

[7] Mladen Vuković. *Matematička logika 1, skripta*. PMF Matematički odjel, 2007.

Indeks