1. **a)** Za broj L kažemo da je limes niza (a_n) ako za svaki ε >0 postoji $n_0 \in \mathrm{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|a_n - L| < \varepsilon$.

b) $a_1 = \sqrt{7}$

$a_{n+1} = \sqrt{7a_n}$

MONOTONOST: (matematičkom indukcijom)

Baza. $a_1 = \sqrt{7}$

$a_2 = \sqrt{7\sqrt{7}} \geq \sqrt{7} = a_1$

Pretp. Da za neki $n \in \mathrm{N}$ vrijedi $a_n > a_{n-1}$

Korak. Dokazujemo da je $a_{n+1} > a_n$

$a_n > a_{n-1} \Rightarrow \sqrt{7a_n} > \sqrt{7a_{n-1}} = a_n \Rightarrow a_{n+1} > a_n$

Pokazali smo da je niz rastući.

OGRANIČENOST: (matematičkom indukcijom)

Baza. $a_1 = \sqrt{7}$ <7

Pretp. Da za neki $n \in \mathrm{N}$ vrijedi a_n<7

Korak. Dokazujemo da vrijedi a_{n+1}<7

$a_{n+1} = \sqrt{7a_n} < \sqrt{7 \cdot 7} = 7$

Pokazali smo da je niz ograničen. Slijedi da je konvergentan.

LIMES:

$a_{n+1} = \sqrt{7a_n}$ **/** $\lim\limits_{n\to\infty}$

$L = \sqrt{7L} \,/^2 \Rightarrow L^2 - 7L = 0 \Rightarrow L_{1,2} = 0{,}7 \Rightarrow L = 7$

2. $a \in$R, $a = ?$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2x)}{3x}, x \geq 0 \\ x^2 + x + a, x \leq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 0+} \frac{\sin(2x)}{3x} = \lim_{x\to 0-}\left(x^2 + x + a\right)$$

$$\lim_{x\to 0+}\left(x^2 + x + a\right) = a$$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\sin(2x)}{3x} = \lim_{x\to 0-} \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot \frac{2}{3} = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

3. $f(x)=e^x$

$f^{-1}(x)=\ln x$

$$\left(f^{-1}(y)\right)'=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}\Rightarrow\left(e^x\right)'=\frac{1}{\ln'\left(e^x\right)}=\frac{1}{\frac{1}{e^x}}=e^x\Rightarrow\left(e^x\right)'=e^x$$

4. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\ln\left(\sqrt{x}\right)}$

$$f'(x)=\frac{\left(\sqrt{x}\right)'\ln\left(\sqrt{x}\right)-\left[\ln\left(\sqrt{x}\right)\right]'\sqrt{x}}{\left[\ln\left(\sqrt{x}\right)\right]^2}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\ln\left(\sqrt{x}\right)-\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{x}}{\left[\ln\left(\sqrt{x}\right)\right]^2}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)-1}{\left[\ln\left(\sqrt{x}\right)\right]^2}$$