

RJEŠENJA 3. ŠKOLSKE ZADAĆE IZ MATEMATIKE 1,
17.12.2007.
grupe 2, 4, 6 A

1. $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{e^{-c}}{24}x^4$ za neki $c \in (0, x)$ ili $c \in (x, 0)$.

2. Prvi način rješavanja:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{2}{x}} \cdot \frac{-2}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = 2$$

(u zadnjem koraku smo primijenili L'Hospitalovo pravilo)

Drugi način rješavanja:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{2}{x} = 2$$

(jer su $\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$ i $\frac{2}{x}$ ekvivalentne neizmjerne male veličine kad $x \rightarrow \infty$)

3.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2}{x^2 + x} + \frac{thx}{x}\right) = 3 + 0 = 3$$

$$l = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2}{x+1} + thx - 3x\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-3x}{x+1} + thx\right) = -3 + 1 = -2$$

Pravac $y = 3x - 2$ je desna kosa asimptota zadane krivulje.

4.

$$P(x) = 2x(9 - x^2) = 2(9x - x^3), \quad x \in (0, 3).$$

$$P'(x) = 2(9 - 3x^2) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{3}.$$

Lako je ustanoviti da se radi o maksimumu. (pomoću predznaka prve derivacije lijevo i desno od $\sqrt{3}$ ili iz $P''(\sqrt{3}) < 0$ (a i geometrijski je to očividno)).

$$P_{max} = 12\sqrt{3}$$

1. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{(1+c)^4}x^4$ za neki $c \in (0, x)$ ili $c \in (x, 0)$.

2. Prvi način rješavanja:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot (e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}) \cdot \frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = 2$$

(u zadnjem koraku smo primijenili L'Hospitalovo pravilo)

Drugi način rješavanja:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot (e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot 2sh\left(\frac{1}{x}\right) = 2$$

(jer su $sh(\frac{1}{x})$ i $\frac{1}{x}$ ekvivalentne neizmjerljivo male veličine kad $x \rightarrow \infty$)

3.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x^2 + x} + \frac{\arctg x}{x} \right) = 1 + 0 = 1$$

$$l = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} + \arctg x - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x}{x+1} + \arctg x \right) = -1 + \frac{\pi}{2}$$

Pravac $y = x + \frac{\pi-2}{2}$ je desna kosa asimptota zadane krivulje.

4.

$$P(x) = 2x(1-x^2) = 2(x-x^3), \quad x \in (0, 1).$$

$$P'(x) = 2(1-3x^2) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Lako je ustanoviti da se radi o maksimumu. (pomoću predznaka prve derivacije lijevo i desno od 1 ili iz $P''(1) < 0$ (a i geometrijski je to očividno)).

$$P_{max} = \frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$