

2. međuispit iz Matematike 1

27.11.2009.

1. [2 boda] a) Dokaži da je niz (a_n) , $a_n = \frac{3^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$, monoton počevši od nekog člana, te da je omeđen.

b) Izračunaj $\lim_n \frac{3^n}{n!}$, te objasni gdje su u izvodu limesa korištena svojstva iz a).

2. [2 boda] Izračunaj: a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+1}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2x}}$,

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{x+3}$.

3. [5 bodova] a)[1 bod] Dokaži da je $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, koristeći "sendvič teorem".

b)[2 boda] Koristeći definiciju derivacije i tvrdnju pod a), dokaži da je $(\sin x)' = \cos x$.

c)[2 boda] Koristeći pravilo za derivaciju inverzne funkcije odredi $(f^{-1})'(x)$ ako je $f(x) = \frac{1}{\pi} \sin x$, $x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.

4. [2 boda] U kojoj točki krivulje $y = \ln(2x + 1)$ treba postaviti tangentu na krivulju tako da ona zatvara kut od 30° s osi x .

5. [2 boda] Nađi $y'(x)$ u točki s ordinatom $y = 1$ krivulje

$$x^3 - 2e^x(1 - y)^2 - y^2 \ln y + 8 = 0.$$

6. [2 boda] a) Koristeći se diferencijalom funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ u točki $x = 36$ odredi aproksimaciju broja $\sqrt{35}$.

b) Koristeći Taylorov polinom 2. stupnja funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ u razvoju oko točke $x = 36$ odredi bolju aproksimaciju broja $\sqrt{35}$.

7. [3 boda] Funkciju $f(x) = e^x$ napiši u obliku $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, gdje je $T_n(x)$ n -ti Taylorov polinom funkcije $f(x) = e^x$ u razvoju oko točke $x = 0$, a $R_n(x)$ je n -ti ostatak u Lagrangeovom obliku, te dokaži da je $\lim_n R_n(x) = 0$.

8. [2 boda] Izračunaj $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \operatorname{arctg}(2x)$.

Vrijeme pisanja je 90 minuta.

Dozvoljeno je korištenje samo službenog podsjetnika.