RJEŠENJA 1. MEĐUISPITA IZ MATEMATIKE 1
02.11.2005.

1. a)

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$(a \wedge b) \Rightarrow (a \vee b)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

b) $(\exists x)(\forall y)(\neg P(x) \vee \neg Q(y))$.

2. injektivnost: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (jer je f injekcija) $\Rightarrow g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ (jer je g injekcija) $\Rightarrow g \circ f$ je injekcija.

surjektivnost: neka je $z \in C \Rightarrow \exists y \in B,\ g(y) = z$ (jer je g surjekcija) $\Rightarrow \exists x \in A,\ f(x) = y$ (jer je f surjekcija)$\Rightarrow g(f(x)) = z$, pa je $g \circ f$ surjekcija.

3. Baza: za $n = 1$ imamo $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ✓

Pretpostavka: vrijedi $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$.

Korak indukcije:

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n z = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) \cdot r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= r^{n+1}(\cos(n\varphi)\cos\varphi - \sin(n\varphi)\cos\varphi + i(\cos(n\varphi)\sin\varphi + \sin(n\varphi)\cos\varphi)) \\ &= r^{n+1}(\cos((n+1)\varphi) + i\sin((n+1)\varphi)) \ \checkmark \end{aligned}$$

4. $\arg(z^3) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$.

Za $\varphi = \frac{\pi}{6}$, imamo $z = r\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$, pa uvjet $|z+2| = 1$ daje $r^2 + 2\sqrt{3}r + 3 = 0$, odnosno $r = -\sqrt{3}$ (nema rješenja).

Slično, za $\varphi = \frac{5\pi}{6}$, imamo $z = r\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$, pa uvjet $|z+2| = 1$ daje $r^2 - 2\sqrt{3}r + 3 = 0$, odnosno $r = \sqrt{3}$.

I za $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, imamo $z = -ri$, pa uvjet $|z+2| = 1$ daje $r^2 = -3$ (nema rješenja). Stoga je jedino rješenje $z = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

5.

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{B}\ {}^{\top}\mathbf{A}^{\top} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

6. a) 1. Zamjena dvaju redaka (determinanta mijenja predznak),

2. množenje nekog retka skalarom α različitim od nule (determinanta se množi sa α),

3. dodavanje nekog retka nekom drugom retku (determinanta se ne mijenja).

b)

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3^4 = 162$$

7. Nezavisni su ako ne postoji netrivijalni prikaz nulvektora kao linearne kombinacije zadanih vektora:

$$\alpha \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Matrica sustava $\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$ ima rang 2, pa sustav ima beskonačno mnogo (jednoparametarskih) rješenja. Dakle ovi vektori su zavisni.

8.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -7 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 2 & 4 \\ 6 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

9.

$$\mathbf{A}_p \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda \end{array}\right]$$

Za $\lambda = 1$ rješenje je $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Za $\lambda \neq 1$ dijelimo drugi i treći redak s $\lambda - 1$ odnosno $1 - \lambda$:

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1+\lambda & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \lambda+1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2 & 1 \end{array}\right].$$

Za $\lambda = -2$ sustav nije rješiv. Za $\lambda \neq 1, -2$ sustav ima jednoznačno rješenje $x = y = z = \frac{1}{\lambda+2}$.

10. a) $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = (\lambda - 1)\,\lambda\,(\lambda - 2)$ pa su svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.

b) Svojstveni vektor za $\lambda_3 = 2$ se dobije rješavanjem homogenog sustava čija je matrica sustava $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$.

Predstavnik beskonačnog (jednoparametarskog) skupa rješenja je $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.