

1. MEĐUISPIT IZ MATEMATIKE 1

02.11.2005.

1. **a)** Dokazati da je formula $(a \wedge b) \Rightarrow (a \vee b)$ identički istinita.
- b)** Zadani su predikati $P(x)$ i $Q(y)$. Služeći se de Morganovim formulama negirati sud $(\forall x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(y))$.
2. Ako su preslikavanja $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ bijekcije, dokazati da je $g \circ f$ bijekcija.
3. Matematičkom indukcijom dokazati formulu za n -tu potenciju ($n \in \mathbb{N}$) kompleksnog broja u trigonometrijskom obliku.
4. Naći kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju oba sljedeća uvjeta:

$$\arg(z^3) = \frac{\pi}{2}, \quad |z + 2| = 1.$$

5. Zadane su matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Riješiti matričnu jednadžbu $(\mathbf{X} + \mathbf{A})^\top = \mathbf{A}\mathbf{B}$.

6. **a)** Koje su elementarne transformacije kvadratne matrice i kako one utječu na vrijednost determinante?

b) Izračunati determinantu

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

7. Jesu li vektori $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ linearno nezavisni? Obrazložiti odgovor!

8. Izračunati inverz matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

9. U ovisnosti o realnom parametru λ riješiti sustav:

$$\begin{cases} \lambda x & +y & +z & = 1 \\ x & +\lambda y & +z & = 1 \\ x & +y & +\lambda z & = 1 \end{cases}$$

10. Zadana je matrica $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Odrediti svojstvene vrijednosti za matricu \mathbf{A} .

b) Odrediti svojstveni vektor koji pripada najvećoj svojstvenoj vrijednosti.