1. međuispit iz Matematike 1

16.10.2009.

1. [**2 boda**] Neka je f realna funkcija realne varijable s prirodnim područjem definicije $D(f)$. Zadan je sud

$$A \equiv (\forall x_1 \in D(f))(\forall x_2 \in D(f))(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)).$$

a) Negiraj sud A (zapiši $\neg A$ bez znaka negacije).

b) Koji sud je točan, A ili $\neg A$, za $f(x) = \sin x$? Obrazloži!

2. [**2 boda**] Nađi i skiciraj u Gaussovoj ravnini sve kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju jednadžbu

$$z^6 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^4.$$

Rješenja prikaži u trigonometrijskom obliku.

3. [**2 boda**] Ako krivulju $y = x^3$ zrcalimo s obzirom na pravac $y = 1$, te tako dobivenu krivulju zrcalimo s obzirom na pravac $y = x$, koja je jednadžba dobivene krivulje?

4. [**2 boda**] Nađi prirodno područje definicije i sliku funkcije f, te skiciraj graf, ako je:

a) $f(x) = \operatorname{arctg}(2x)$, b) $f(x) = \operatorname{arth}(2x)$.

5. [**2 boda**] a) Ako je $\mathbf{A}$ regularna matrica, dokaži da je $\det \mathbf{A} \neq 0$.

b) Neka su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ regularne matrice. Dokaži da je $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$.

OKRENI!

6. [**2 boda**] a) Zadane su regularne matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$. Riješi jednadžbu

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A},$$

tj. zapiši $\mathbf{X}$ kao umnožak zadanih matrica i njihovih inverza.

b) Riješi zadanu jednadžbu za $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

7. [**2 boda**] Izračunaj determinantu

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 4 \\ 2 & 2 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 8 & 4 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \end{vmatrix}.$$

8. [**3 boda**] Zadani su vektori $\mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ \lambda \end{bmatrix}$.
Odredi λ tako da $\mathbf{b}$ bude linearna kombinacija vektora $\mathbf{a_1}$ i $\mathbf{a_2}$.

9. [**3 boda**] a) Dokaži da su svojstvene/vlastite vrijednosti matrice nultočke karakterističnog polinoma.

b) Zadana je matrica $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Odredi svojstvene/vlastite vrijednosti za matricu $\mathbf{A}$. Odredi svojstvene/vlastite vektore koji pripadaju najmanjoj svojstvenoj/vlastitoj vrijednosti.

Vrijeme pisanja je 90 minuta.

Dozvoljeno je korištenje samo službenog podsjetnika.