Prva školska zadaća iz Matematike 1, grupe 3, 7 i 9, 29. 09. 2008.
Grupa A

1. (2 boda) Matematičkom indukcijom dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2 .$$

2. (3 boda) Nađite sva rješenja jednadžbe

$$z^3 = (\sqrt{3} - i)^9$$

u skupu kompleksnih brojeva.

3. (2 boda) Odredite prirodno područje definicije (domenu) funkcije $f(x) = \sqrt{3 - log_2(x^2 - 1)}$.

4. (3 boda)

(a) (1 bod) Dokažite da za matrice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n$ vrijedi $\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 = (\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B})$, ako i samo ako $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ komutiraju.

(b) (2 boda) Odredite sve matrice $\mathbf{X}$ koje komutiraju s matricom

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prva školska zadaća iz Matematike 1, grupe 3, 7 i 9, 29. 09. 2008.
Grupa B

1. (2 boda) Matematičkom indukcijom dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2} .$$

2. (3 boda) Nađite sva rješenja jednadžbe

$$z^4 = (-1 + i)^8$$

u skupu kompleksnih brojeva.

3. (2 boda) Odredite prirodno područje definicije (domenu) funkcije $f(x) = \sqrt{4 - log_2^2(x + 1)}$.

4. (3 boda)

(a) (1 bod) Dokažite da za matrice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n$ vrijedi $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{B}^2$ ako i samo ako $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ komutiraju.

(b) (2 boda) Odredite sve matrice $\mathbf{X}$ koje komutiraju s matricom

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$