# Fourierova transformacija. Razlučivost u vremensko – frekvencijskoj ravnini. DFT matrica.

## Uvod

Na kolegiju NMDOS upoznat ćete se s nizom linearnih transformacija: STFT, GE, CWT, DWT,... kao i s razlaganjima signala filtarskim slogovima. Da bismo u potpunosti shvatili svojstva navedenih transformacija, u ovoj domaćoj zadaći ćemo detaljno proučiti svojstva poznatih transformacija: DFT-a i drugih varijanata Fourierove transformacije.

DFT je posebno prikladna za razumijevanje jer se može predstaviti matričnim operatorom. U zadaći ćete sami konstruirati DFT matricu, koristiti je za transformaciju signala, ispitati je i geometrijski interpretirati njezina svojstva.

Nadalje, definirat ćemo razlučivost u vremenskoj i frekvencijskoj domeni i provjeriti njihove odnose za zadane signale.

## DFT kauzalnih i nekauzalnih odsječaka perioda

Diskretna Fourierova transformacija (DFT) definirana je sljedećim izrazom:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}nk}, \qquad (1)$$

dok je izraz za inverznu diskretnu Fourierovu transformaciju (IDFT):

$$x(n) = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}nk}. \qquad (2)$$

Za numeričko izračunavanje DFT-a u MATLAB-u služi funkcija `fft()`, dok je inverzna funkcija `ifft()`.

| **Primjer 1:** | **Primjer 2:** |
|---|---|
| `x = [1 1 2 2 1];`<br>`X = fft(x)`<br>`X =`<br>`7.0000   -1.6180   0.6180   0.6180 -1.6180` | `x = [1 -1 2 -1];`<br>`X = fft(x)`<br>`X =`<br>`1      -1      5      -1` |

Važna je činjenica da DFT podrazumijeva da je signal *x* periodičan niz perioda *N*, a rezultat je (općenito) kompleksan i periodičan niz, također perioda *N*. Transformacijska formula se primjenjuje na jednom periodu signala.

| **Primjer 1:** | **Primjer 2:** |
|---|---|
| `x = [1 1 2 2 1];`<br>ustvari znači:<br>x = $\{1\ 1\ 2\ 2\ 1\}_5$<br>= {..., 1, 2, 2, 1, <u>1</u>, 1, 2, 2, 1, ...} | `x = [1 -1 2 -1];`<br>ustvari znači:<br>x = $\{1\ {-1}\ 2\ {-1}\}_4$ =<br>={..., 1, -1, 2, -1, <u>1</u>, -1, 2, -1, 1 ...} |

Podcrtan je uzorak koji odgovara koraku $n=0$.

Periodičko proširenje važi i za rezultat *X* u domeni transformacije.

U oba je primjera rezultat u domeni transformacije realan. Razlog je simetričnost ili parnost analiziranog signala oko nultog koraka:

{..., 1, -1, 2, -1, <u>1</u>, -1, 2, -1, 1, ...}.

Analizirajuće funkcije su harmonijske:

$$e^{j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}nk} = \cos\frac{2\pi}{\mathrm{N}}nk + j\sin\frac{2\pi}{\mathrm{N}}nk\,,$$

a realni dio rezultata korespondira s parnim, odnosno simetričnim komponentama signala (kosinus je parna funkcija), dok imaginarni dio korespondira s neparnim, odnosno antisimetričnim komponentama signala (sinus je neparan).

Uočimo da smo funkciji `fft()` kao argument proslijedili kauzalni odsječak periodičkog niza *{x(0), x(1), x(2), x(3), x(4)}*, gdje je varijabla koraka $n \in$*{1, 2, 3, 4, 5}*. Simetričnost oko nultog uzorka nije direktno vidljiva iz takvih odsječaka:

Primjer 1: `x = [1 1 2 2 1];`
Primjer 2: `x = [1 -1 2 -1];`

Zgodniji je prikaz istog signala nekauzalnim odsječkom perioda simetričnim oko nule:

Primjer 1: `{x(-2), x(-1), x(0), x(1), x(2)} = [2 1 1 1 2];`
Primjer 2: `{x(-2), x(-1), x(0), x(1)} = [2 -1 1 -1].`

Uočimo da za parne N uzimamo jedan uzorak više s negativnim korakom.

Vezu između ova dva odsječka signala osiguravaju MATLAB funkcije `fftshift()` i `ifftshift()`:

| **Primjer 1:** | **Primjer 2:** |
|---|---|
| `fftshift([1 1 2 2 1])` | `fftshift([1 -1 2 -1])` |
| `% u nekauzalan oblik` | `% u nekauzalan oblik` |
| `ans = 2 1 1 1 2` | `ans = 2 -1 1 -1` |
| `ifftshift([2 1 1 1 2])` | `ifftshift([2 -1 1 -1])` |
| `% u kauzalan oblik` | `% u kauzalan oblik` |
| `ans = 1 1 2 2 1` | `ans = 1 -1 2 -1` |

Identične veze i korištenje funkcija `fftshift`() i `ifftshift`() važe i za rezultat transformacije *X*.

Za potrebe prikaza ili prilikom zadavanja signala redovito ćemo raditi s nekauzalnim odsječcima. Kod primjene `fft`() ili `ifft`() redovito radimo s odgovarajućim kauzalnim odsječcima signala ili spektra.

Primjer:

```
n = [-16:15];                  % zadaje vektor koraka u rasponu -16 do 15
x = exp(-abs(n));              % zadaje simetričnu funkciju x
plot(n, x);                    % crta funkciju
x_kauzalni = ifftshift(x);     % uzima kauzalni odsjecak istog signala
X = fft(x_kauzalni);           % racuna DFT
X_simetricni = fftshift(X);    % razmjesta X tako da uzorak uz w=0
                               % bude u sredini
w = [-pi: pi / 16: pi-pi/16];% zadaje vektor frekvencija u
                               % rasponu –pi do pi
plot(w, abs(X_simetricni));    % crta amplitudu od X
figure
plot(w, angle(X_simetricni))  % crta fazu od X
```

Što bi se dogodilo da smo `fft()` funkciji proslijedili simetričan nekauzalan odsječak?

| Primjer 1: | Primjer 2: |
|---|---|
| `x = [2 1 1 1 2];`<br>`X = fft(x)`<br>`X =`<br>`7.0000   1.3090 + 0.9511i   0.1910 + 0.5878i   0.1910 - 0.5878i   1.3090 - 0.9511i` | `x = [2 -1 1 -1];`<br>`X = fft(x)`<br>`X =`<br>`    1     1     5     1` |

MATLAB funkcija `fft()` će dani odsječak tretirati kao kauzalan, odnosno s kašnjenjem u iznosu *Δ=(N-1)/2* za neparne *N*, odnosno Δ=*N*/2 za parne *N* u odnosu na stvarni kauzalni odsječak našeg periodičkog niza (ovo se najbolje vidi ako nacrtate primjere 1 i 2).

To u domeni transformacije *X* predstavlja množenje kompleksnom eksponencijalom:

$$X[k] = X_{\text{kauzalni}}[k] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}\Delta k}$$

što je i vidljivo iz rezultata naših primjera.

U svim primjerima koji slijede često će biti potrebno konstruirati signal, izračunati DFT i prikazati rezultate transformacije. Stoga će se funkcije `ifftshift()` i `fftshift()` vrlo često koristiti u obje domene.

## DFT matrica

Diskretna Fourierova transformacija (DFT) definirana je sljedećim izrazom:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}nk}, \qquad (3)$$

što raspisano po uzorcima rezultata glasi:

$$X[0] = x[0]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}0\cdot 0} + x[1]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}1\cdot 0} + x[2]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}2\cdot 0} + \cdots + x[N-1]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}(N-1)\cdot 0},$$

$$X[1] = x[0]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}0\cdot 1} + x[1]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}1\cdot 1} + x[2]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}2\cdot 1} + \cdots + x[N-1]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}(N-1)\cdot 1},$$

$$\cdots$$

$$X[N-1] = x[0]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}0\cdot(N-1)} + x[1]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}1\cdot(N-1)} + x[2]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}2\cdot(N-1)} + \cdots + x[N-1]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}(N-1)\cdot(N-1)}.$$

Isto se može prikazati i matricom:

$$\mathbf{W}_{\mathrm{N}} = \left[W_{\mathrm{N}}^{km}\right] \qquad W_{\mathrm{N}} = e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}}$$

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}} & e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}\cdot 2} & \cdots & e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}(N-1)} \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}\cdot 2} & e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}\cdot 4} & \cdots & e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}(N-1)\cdot 2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}(N-1)} & e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}(N-1)\cdot 2} & \cdots & e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}(N-1)\cdot(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

Stupci DFT matrice su međusobno ortogonalni:

$$\mathbf{c}_k^{*T} \cdot \mathbf{c}_m = N\ \boldsymbol{\delta}[k-m].$$

Iz ovih činjenica slijedi da je:

$$\mathbf{W}_{\mathrm{N}}^{*T} \cdot \mathbf{W}_{\mathrm{N}} = NI\ ,$$

što daje jednostavan recept za inverziju:

$$\mathbf{W}_{\mathrm{N}}^{-1} = \frac{1}{N}\mathbf{W}_{\mathrm{N}}^{*T}.$$

Takve matrice nazivamo **unitarnim**. Kako je DFT matrica i simetrična, potrebna je samo konjugacija i dijeljenje s *N*.

Kako u MATLAB-u zadati DFT matricu?

Elementi matrice su $W_{\mathrm{N}}^{km}$. Uočimo da se eksponenti elemenata matrice *km* mogu konstruirati kao vanjski produkt vektora:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ N-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & N-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & N-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & N-1 & \cdots & (N-1)(N-1) \end{bmatrix}$$

Dobiveni rezultat se može iskoristiti za dobivanje DFT matrice. U MATLAB-u bi to glasilo:

```
w = exp(-j*2*pi/N);
W = w.^([0:N-1]' * [0:N-1]);
```

Za zadani *N*, sada možemo provjeriti ortogonalnost stupaca matrice. Skalarni produkt stupaca:

```
W(:,k)' * W(:,m)
```

bit će nula za *k* različit od *m*, a *N* za *k* jednak *m*.

Uočimo da u MATLAB-u operator ' podrazumijeva konjugaciju i transpoziciju (*eng. conjugate transpose*), dok je operator .' „obična" transpozicija.

Slijedi da je:

```
W' * W
```

dijagonalna matrica s vrijednošću *N* na dijagonali.

Za svaki zadani *N* možemo provjeriti i svojstvene vrijednosti matrice:

```
eig(W)
```

te se uvjeriti da im je svima apsolutna vrijednost jednaka korijenu iz *N*. Iz jednostavnog geometrijskog razmatranja možemo zaključiti da DFT matrica <u>svim</u> vektorima *x* <u>jednako</u> mijenja dužinu (za korijen iz *N*), odnosno energiju (za *N*).

Parsevalov teorem o očuvanju energije:

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} |X[k]|^2$$ (u MATLAB-u: `sum(conj(X).*X)/N`)

možemo promatrati kao posljedicu unitarnosti matrice, odnosno operatora transformacije.

## Rezolucija u vremenskoj i frekvencijskoj domeni

Efektivna širina ili radijus funkcije definiran je izrazom:

$$\Delta_{eff}^2\left[x(t)\right]=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}(t-t_c)^2\left|x(t)\right|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x(t)\right|^2 dt}, \qquad (4)$$

gdje brojnik predstavlja drugi moment funkcije, a nazivnik ukupnu energiju. Centar koncentracije energije $t_c$ funkcije $x(t)$ računa se prema izrazu:

$$t_c=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}t\left|x(t)\right|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x(t)\right|^2 dt}, \qquad (5)$$

Ovdje brojnik predstavlja prvi moment, a nazivnik opet ukupnu energiju. Na isti se način računaju vrijednosti efektivne širine spektra i centralna frekvencija.

Za primjer ćemo uzeti Gaussovu funkciju, a centar koncentracije energije i efektivnu širinu funkcije računat ćemo simbolički i numerički.

Slijedi simbolički račun u MATLAB-u.

```
t=sym('t', 'real')
x=exp(-t*t)
```

Centar koncentracije energije vremenskog signala računamo na sljedeći način:

```
tc=int(t*abs(x)^2,-inf,inf) / int(abs(x)^2,-inf,inf)
```

Rezultat je, očekivana, nula.

Slijedi računanje efektivne širine funkcije:

```
deltat= sqrt(int((t-tc)^2*abs(x)^2,-inf,inf) / int(abs(x)^2,-inf,inf))
```

Rezultat je ½, što se poklapa s formulom dobivenom na predavanjima (a=1).

Ponovimo istu stvar u frekvencijskoj domeni. Simbolička Fourierova transformacija naše funkcije dobiva se sljedećom naredbom:

```
X=fourier(x)
```

Funkcija X predstavlja Fourierovu transformaciju funkcije x, a frekvencija je predstavljena simboličkom varijablom w. Slijedi računanje centralne frekvencije

```
w = sym('w', 'real')
wc=int(w*abs(X)^2,-inf,inf) / int(abs(X)^2,-inf,inf)
```

što daje nulu. Računanje efektivne širine u frekvencijskoj domeni:

```
deltaw= sqrt(int((w-wc)^2*abs(X)^2,-inf,inf) / int(abs(X)^2,-inf,inf))
```

Rezultat je jedan.

Provjerimo produkt efektivnih širina u dvije domene:

```
deltat*deltaw
```

Ako smo sve dobro radili, rezultat je poznat: ½.

Sada ćemo ponoviti cijeli postupak na diskretnom signalu koristeći numeričke metode.

Prvo zadajemo diskretni Gaussov signal:

```
N=128;
T=1/16;              % kvant vremena
n= [-N/2:N/2-1]';    % vektor koraka vremena
nT = n * T;          % vektor vremena
y = exp(-nT.*nT);  stem(n, y); figure, plot(nT, y);
```

Sada računamo centar koncentracije energije

```
nTc = sum(nT.*abs(y).^2) / sum(abs(y).^2)
```

i efektivnu širinu funkcije

```
delta_nT = sqrt(sum(((nT-nTc).^2).*abs(y).^2) / sum(abs(y).^2))
```

Rezultati se dobro poklapaju s dobivenima simboličkim računom.

Fourierova transformacija diskretne funkcije u simetričnom obliku se dobiva ovako:

```
Y = fftshift(fft(ifftshift(y)));
```

Pripremimo vektore diskretnih frekvencija, nacrtamo rezultat i izmjerimo efektivnu širinu:

```
F = 1/T;              % kvant frekvencije
k = n;                % vektor koraka frekvencije
kF = k / (N/2) * pi;  % vektor normirane frekvencije (-pi do pi)
figure, stem(k, Y); figure, plot(kF, Y);
kFc = sum(kF.*abs(Y).^2) / sum(abs(Y).^2)
delta_kF = F*sqrt(sum(((kF-kFc).^2).*abs(Y).^2) / sum(abs(Y).^2))
```

Produkt efektivnih širina u dvije domene daje poznati iznos ½ :

```
delta_nT*delta_kF
```

## Ime i prezime:

## 1. Zadatak

Zadajte diskretni Gaussov signal $x[n]=e^{-\frac{n^2}{16}}$ i izračunajte pripadnu DFT. Nacrtajte signal u nekauzalnom intervalu $n \in [-N/2,\ N/2-1]$ uz $N$=64 te pripadnu DFT transformaciju. Transformaciju $X$, odnosno njenu amplitudu i fazu nacrtajte tako da se frekvencija nula nalazi na sredini grafa.

**Upišite korake rješenja:**

Kako ste zadali vektor koraka $n$?

Kako ste zadali vektor signala $x$?

Kojom naredbom ste nacrtali $x$, a da opis vremenske osi bude korektan?

Kako ćete iz nekauzalnog vektora $x$ doći do njegove kauzalne verzije potrebne za DFT?

Kakav rezultat dobivate ako direktno proslijedite nekauzalni simetrični vektor $x$ funkciji fft()? Provjerite da li se teorijska formula slaže za deseti uzorak rezultata.

Što treba učiniti da uzorak transformacije $X$ koji odgovara nultoj frekvenciji dođe na sredinu prikaza?

Kako ste zadali vektor frekvencija $w$ u rasponu od $-\pi$ do $\pi$ koji će nam trebati za korektan opis frekvencijske osi kod prikaza amplitude i faze od $X$ ?

## 2. Zadatak

Kreirajte DFT matricu W uz $N$ = 4. Provjerite da su stupci matrice W ortogonalni. Izračunajte svojstvene vrijednosti od $W_4$, te njihove apsolutne vrijednosti. Provjerite da je W' * W dijagonalna matrica.

Zadajte sami dva različita signala $x$. Provjerite da množenje W*x daje isti rezultat kao i fft(x). Provjerite da je matrica 1/N*conj(W) inverzna matrica od W. Provjerite Paresvalov teorem.

Kreirajte DFT matricu W uz $N$ = 2. Izračunajte karakteristične vektore i svojstvene vrijednosti. Grafički nacrtajte transformaciju vektora x = [1 1] i njegovih projekcija na karakteristične smjerove.

**Upišite korake rješenja:**

Kako ste kreirali DFT matricu $W_4$?

Kako ste računali skalarni produkt stupaca DFT matrice? Koje ste rezultate dobili?

Koliko iznose svojstvene vrijednosti od W? Koja im je apsolutna vrijednost?

Odaberite proizvoljan vektor x. Napišite x i W*x. Da li se rezultat slaže s funkcijom fft(x)?

Odaberite vektor x takav da rezultat W*x bude realan. Napišite x i W*x. Da li se rezultat slaže s funkcijom fft(x)?

Kako ste provjerili da je 1/N*conj(W) inverzna matrica od W?

Na primjeru vašeg signala provjerite Parsevalov teorem. Kolika mu je energija u pojedinim domenama?

Kreirajte DFT matricu W uz $N$ = 2. Izračunajte karakteristične vektore i svojstvene vrijednosti funkcijom [v d] = eig(W). Rukom na papiru nacrtajte karakteristične vektore, vektor signala x = [1 1], pripadnu transformaciju X te projekcije oba vektora na karakteristične smjerove. Koliko je X duži od x? Da li produženje ovisi o x?

## 3. Zadatak

Odredite efektivne širine funkcije $x(t) = e^{-|t|}$ u vremenskoj i frekvencijskoj domeni te provjerite Heisenbergov princip neodređenosti. Računanje efektivnih širina obaviti pomoću numeričkih i simboličkih metoda.

**Upišite korake rješenja:**

Definirajte realne simboličke varijable *t* i *w* i funkciju *x*. Kako ste odredili centar koncentracije energije i koliko on iznosi?

Kako ste definirali efektivnu širinu funkcije i koliko ona iznosi?

Napravite Fourierovu transformaciju funkcije. Kako ste definirali i kolika je vrijednost centralne frekvencije?

Kolika je efektivna širina spektra?

Koliko iznosi umnožak efektivnih širina obaju domena?

Sada ponovite postupak koristeći numerički račun. Neka vremenski korak bude T=1/16, a vremenske granice [-4, 4-T]. Izračunajte diskretne vrijednosti funkcije *x*.

Kolike su vrijednosti centra koncentracije energije i efektivne širine funkcije te kojim ste se izrazima koristili za njihovo izračunavanje.

Razlikuju li se te vrijednosti od onih iz simboličkog računa? Ako da zašto?

Kojim izrazom računate Fourierovu transformaciju signala?

Kako definirate odgovarajući vektor frekvencija?

Kolike su vrijednosti centralne frekvencije i efektivna širina spektra te kako se odnose prema vrijednostima iz simboličkog računa?

Koliko iznosi umnožak efektivnih širina u dvije domene?